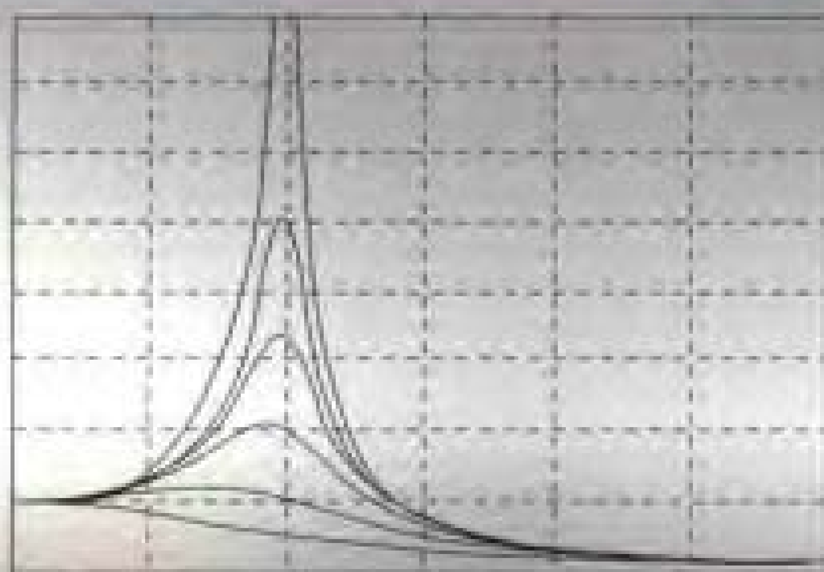
振动理论与隔振技术

Vibration Theory and Vibration Isolation

朱石坚　楼京俊　何其伟　翁雪涛　编著



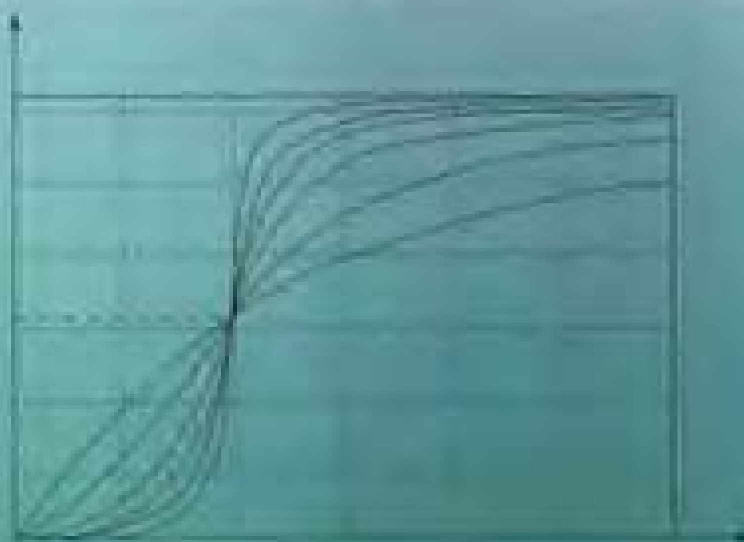


国防工业出版社
National Defense Industry Press

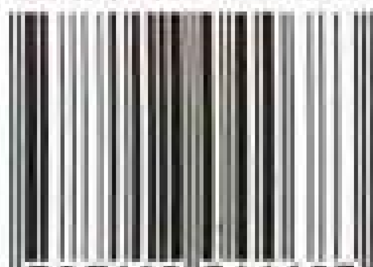
责任编辑：王坡麟　plwang@ndip.cn
责任校对：钱辉玲
封面设计：李　娴　sli@ndip.cn

振动理论与隔振技术

Vibration Theory and Vibration Isolation



上架建议：机械工程
http://www.ndip.cn



ISBN 7-118-04468-7/TH · 197
定价：28.00元

振动理论与隔振技术

Vibration Theory and Vibration Isolation

朱石坚　楼京俊　何其伟　翁雪涛　编著

国防工業出版社

·北京·

内 容 简 介

本书简明系统地阐述了振动理论及其在隔振技术中的应用。振动理论包括离散线性系统振动、连续线性系统振动、随机振动、非线性系统振动的基本概念、理论和方法。本书还给出了解决各种典型隔振问题的一般方法，内容包括隔振系统的动态特性、隔振效果的影响因素、隔振效果的评估和隔振系统的设计准则。全书取材精炼、内容新颖、注重理论与应用相结合。

本书可供隔振设计和应用隔振技术和方法的工程师，特别是那些从事隔振技术咨询的工程技术人员使用，也可作为有关专业机械振动课程的研究生、本科生教材。

图书在版编目(CIP)数据

振动理论与隔振技术／朱石坚等编著. —北京：国防工业出版社，2006.6
ISBN 7-118-04468-7

Ⅰ.振... Ⅱ.朱... Ⅲ.①机械振动—振动理论 ②机械振动—技术 Ⅳ.TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 021607 号

※

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044）
国防工业出版社印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 11⅝ 字数 298 千字
2006 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 28.00 元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前　言

本书系统地介绍了振动理论及其在隔振技术中的应用，旨在总结作者多年来在振动理论教学、隔振和其它振动控制系统设计分析等方面的经验。

近年来，隔振技术日益受到人们的重视，究其原因，主要有两个方面：一方面，我们周围的振源强度在不断加大，例如，机械运转速度不断增加、越野汽车和四缸内燃机数量剧增、切削刀头不断改进使得机床能进行更重型的切割等；另一方面，工程中对振级的限制越来越严格。这主要是由于工程中所要求的精度越来越高、测量仪器的灵敏度显著提高、一些更容易被激振的轻型结构（但具有一定强度）被广泛应用，人们对面定结构、交通工具等的高舒适性要求给厂家带来越来越大的竞争压力等。为了解决这些相互矛盾的问题，人们需要不断改进振动防护方法。

隔振是振动防护中使用得最为广泛的一种方法。该方法通过一个包含了特殊装置的辅助系统将振源和被保护物体隔离开来。这种特殊装置称为隔振器或隔振座架。隔振的作用是减小振源和被隔振物体之间的动态耦合，从而减少不良振动传递给被保护物体或从物体传出。减少这种动态耦合的同时也会产生一些“负面”影响，例如，增加振源和被保护物体之间的相对位移，增加安装的尺寸、质量和成本等。在柔性隔振器上安装一些相互连接着的部件时，会增加它们之间的对中难度，这通常具有危害性。因此，在许多情况下，需要采用一种多参数优化方法来获得合适的隔振效果并满足其它约束条件。

尽管隔振问题在有关振动的教科书中大都作了最基本的叙述，在一些振动手册中也有详细的讨论。但由于被隔振物体、支承

结构、激励力和隔振器等都具有非常复杂的动态特性，教科书和手册中所介绍的经典隔振原理通常不能满足实际工程需要。在实际工程中，尚需要对隔振系统进行更深入的研究，如隔振系统的动态耦合、阻尼、基础的柔性和隔振器中的波效应等因素对隔振效果的影响。如果不对这些问题进行深入探讨，就不可能对工程中的隔振系统进行优化。在一些学术期刊、会议论文集和专利中有大量的关于振动隔离的资料，但这些资料的全面收集与整理对于实际工程设计者来说相当困难，对一般使用者，那几乎是不可能的。为此，本书对隔振问题进行了全面的论述。为了使本书自成体系，还对振动理论进行了详细介绍。

本书分为两大部分。第一部分(第1章～第4章)为振动理论基础，主要讨论离散线性振动系统、连续线性振动系统、随机激励下的振动以及非线性系统的振动。第二部分(第5章～第8章)全面论述了隔振问题，包括隔振系统的动态过程分析、隔振效果的影响因素、隔振效果的评估和隔振系统设计准则。

本书可作为航空、海洋、机械、土建、交通、能源等工程领域的本科生或研究生教材，也可供从事振动咨询的工程技术人员、振动工程的设计者和隔振装置的制造商参考。

编　者

2006年1月21日

目　录

第1章　离散线性振动系线

1.1　单自由度系统

1.1.1　系统运动微分方程

一个典型的单自由度线性振动系统如图1－1所示，图中 m 代表质块的质量，k 代表线性弹簧刚度，c 代表阻尼器的黏滞阻尼系数，$F(t)$ 是作用在质块 m 上的激励力，$x(t)$ 表示质块 m 在激励力 $F(t)$ 作用下的位移。

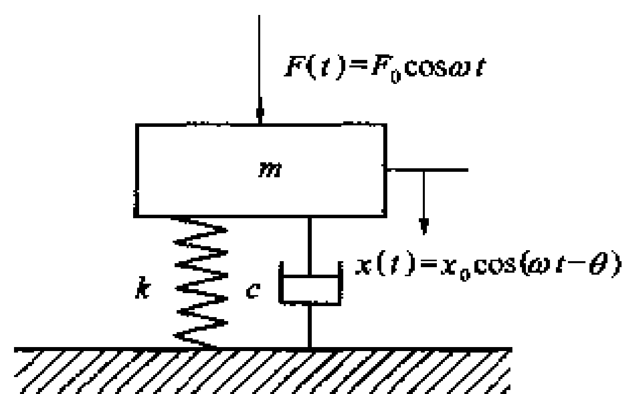


图1－1　单自由度振动系统

所谓线性弹簧是指弹簧的反作用力与弹簧的相对变形成正比，如果弹簧的自由长度为 l_0，在外力 F 的作用下它的长度变为 l，则弹簧的反作用力 $F_F=-k(l-l_0)$，其中，比例系数 k 就称为线性弹簧的刚度系数，简称为线性弹簧的刚度。F_F 的大小与 F 的大小相等，负号表示 F_F 的方向与 F 的方向相反。一般螺旋金属弹簧在小变形时可认为是线性弹簧。

黏滞阻尼是一种其阻尼力与阻尼器两端的相对速度成正比的阻尼，如果阻尼器两端的相对速度为 $\dot{x}(t)$，则阻尼力为 $F_c=-c\dot{x}(t)$，其中，比例系数 c 称为黏滞阻尼系数。负号表示 F_c 的方向与相对速度 $\dot{x}(t)$ 的方向相反。一般的钢弹簧在小变形范围内可认为是在变形方向上具有刚度为 k 的线性弹簧和黏滞阻尼系数

为 c 的阻尼器的组合线性支承元件。

根据达朗贝尔原理,可得图 1－1 所示的单自由度线性系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F(t) \tag{1-1}$$

式(1－1)的初始条件记为

$$x_0=x(t)\big|_{t=0},\quad v_0=\dot{x}(t)\big|_{t=0} \tag{1-2}$$

以上研究的是线性弹簧,实际应用中还有扭转弹簧[1]。当扭转弹簧的弹性反力矩 M 与其相对角位移 θ 成正比时称为线性扭转弹簧,此时有 $M=k\theta$。工程实际中,支承元件可能是由弹性元件的串、并联组合而成。

对图 1－2 所示的串联弹簧系统,其等效刚度为

$$k_{eq}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j}\right)^{-1} \tag{1-3}$$

对图 1－3 所示的并联弹簧系统,其等效刚度为

$$k_{eq}=\sum_{j=1}^{n}k_j \tag{1-4}$$

黏滞阻尼是一种线性阻尼,除了与相对线速度成正比的黏滞阻尼外,还有与相对角速度成正比的黏滞阻尼,其阻尼力矩 $M_d=-c\dot{\theta}$,其中,$\dot{\theta}$ 是相对角速度。

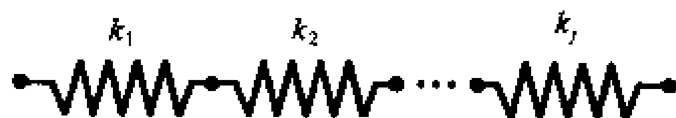


图 1－2 串联弹簧系统

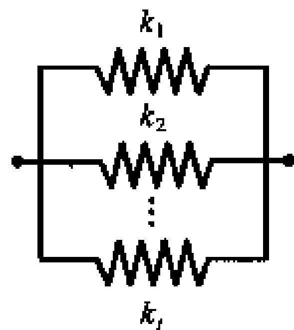


图 1－3 并联弹簧系统

1.1.2 系统的自由振动响应

由式(1－1)和式(1－2)不难得出图 1－1 所示的单自由度线

性系统作自由振动时的初值问题为[2]

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0;\quad x_0=x(t)\big|_{t=0};\ v_0=\dot{x}(t)\big|_{t=0} \tag{1-5}$$

根据常微分方程理论,令 $x(t)=Ae^{st}$,并将其代入式(1-5)中的第一式,得系统的特征方程为

$$ms^2+cs+k=0 \tag{1-6}$$

记

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}};\quad \xi=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{1-7}$$

则特征方程变为

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0 \tag{1-8}$$

由式(1-8),可以求出系统的两个特征根为

$$s_{1,2}=(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1})\omega_n \tag{1-9}$$

由式(1-9)知,系统的两个特征根取决于 ω_n 和 ξ,但其性态取决于 ξ 的取值范围,现就 ξ 的不同取值范围来讨论。

(1) $\xi=0$,即系统无阻尼

由式(1-7)的第二式知,如果 $c=0$,则 $\xi=0$,即系统无阻尼。此时,系统的两个特征根为

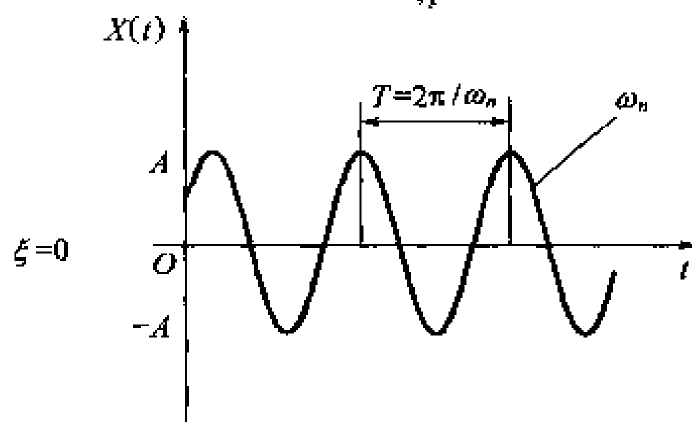
$$s_{1,2}=\pm i\omega_n \tag{1-10}$$

式中:$i=\sqrt{-1}$,下同。于是,无阻尼系统的通解为

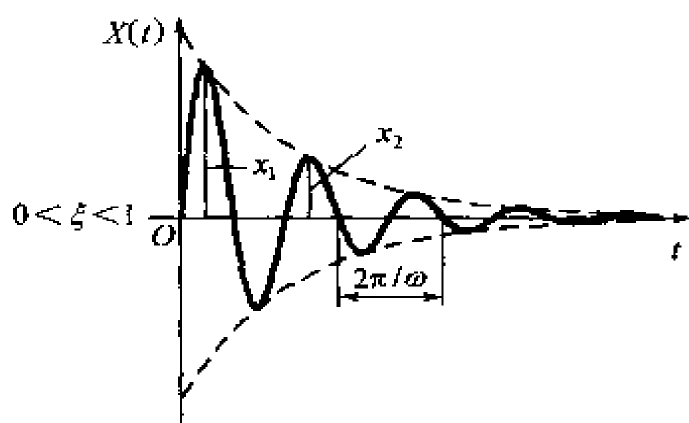
$$x(t)=A_1e^{i\omega_n t}+A_2e^{-i\omega_n t}=X\cos(\omega_n t-\psi) \tag{1-11}$$

式中:X 称为振幅;ψ 称为初相;ω_n 称为无阻尼系统的固有圆频率。由式(1-7)的第一式知,ω_n 是由系统参数 k 和 m 决定的,而与初始条件无关。如果 k 的单位取 N/m,m 的单位取 kg,则 ω_n 的单位为 rad/s。ω_n 与工程实际中通常讲的固有频率 f_n 的关系为 $f_n=(1/2\pi)\omega_n$,此时 f_n 的单位为 1/s,称为 Hz,它表示系统每秒钟的振动次数。f_n 的倒数称为系统的基本周期,用 T 表示,$T=1/f_n$,

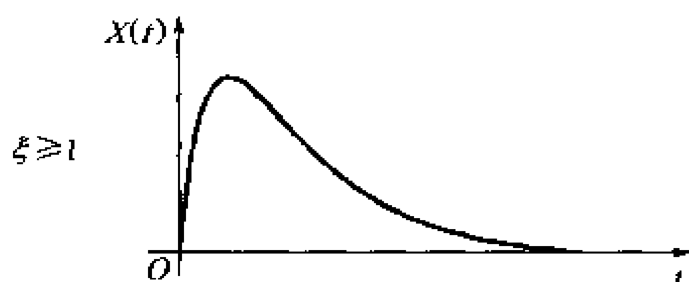
T 的单位是 s，它表示系统每振动一次，即完成一次循环所需的时间。式(1－11)表示的是一等幅振荡，如图 1－4(a)所示。



(a)



(b)



(c)

图 1－4　响应曲线

振幅 X 和初相位 ψ 与系统参数无关，它们是由初始条件唯一确定的。满足式(1－5)所给出的初始条件的解为

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}; \quad \psi = \arctan\frac{v_0}{\omega_n x_0} \qquad (1-12)$$

(2) $\xi < 1$,即小阻尼情形

此时,系统的两个特征根为共轭复根 $s_{1,2}=(-\xi \pm \mathrm{i}\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$。如果记

$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\omega_n \tag{1-13}$$

则

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \mathrm{i}\omega_d \tag{1-14}$$

于是系统的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= X_1 e^{(-\xi\omega_n+\mathrm{i}\omega_d)t} + X_2 e^{(-\xi\omega_n-\mathrm{i}\omega_d)t} \\ &= X e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \psi) \end{aligned} \tag{1-15}$$

式中:ω_d 称为有阻尼系统的固有圆频率,它由系统参数 k、m、c 确定,显然 $\omega_d<\omega_n$。X、ψ 分别表示系统的最大振幅和初相位,由系统的初始条件确定。不难看出,式(1-15)表示的是一振幅按指数规律衰减的减幅振荡,变化情况示于图 1-4(b)。

满足式(1-15)所给出的初始条件的解为

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}; \quad \psi = \arctan\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{x_0\omega_d} \tag{1-16}$$

由式(1-15)不难看出,若有阻尼系统自由振动时的周期记为 $T_d=2\pi/\omega_d$,则

$$\frac{x(t)}{x(t+T_d)} = e^{\xi\omega_n\cdot T_d} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{1-17}$$

两边取自然对数,得

$$\ln\frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{1-18}$$

定义系统的对数衰减率为 $\delta=\ln[x(t)/x(t+T_d)]$,则得

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{1-19}$$

因此系统的阻尼比

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \tag{1-20}$$

当 $\xi \ll 1$ 时，由式(1-19)得

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} \tag{1-21}$$

由上面的分析可知，只要测量出了系统在作自由振动时相隔周期 T_d 的响应幅值比，即只要测出了 δ，就可以方便地求出系统的阻尼比 ξ。在实际测量过程中，一般测量相隔 n 个周期的两幅值，记它们之比的对数为 δ_n，则用 $\xi \approx \delta_n/(n \times 2\pi)$ 求 ξ，这样就可以提高测量精度。

(3) $\xi > 1$，即过阻尼情形

当 $\xi > 1$ 时，式(1-19)右边的括号中为实数，即两特征根为实数

$$s_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n \tag{1-22}$$

显然两特征根均为负实数，此时通解为

$$x(t) = X_1 e^{s_1 t} + X_2 e^{s_2 t} \tag{1-23}$$

上式表示的运动不是振荡运动，因此当 $\xi > 1$ 时，系统不可能产生振动，其运动性态如图 1-4(c)所示。

(4) 当 $\xi = 1$ 时，即临界阻尼情形

当 $\xi = 1$ 时，系统的两特征根均为负实数，且为重根

$$s_{1,2} = -\omega_n \tag{1-24}$$

此时系统的通解为

$$x(t) = (X_1 + X_2 t) e^{-\omega_n t} \tag{1-25}$$

上式表示的运动也不是振荡运动，系统不可能发生振动，其运动性态示于图 1-4(c)。进一步分析可知，系统偏离平衡位置后，它将以最快的速度回复到平衡位置。

1.1.3 系统的强迫振动响应

系统的激励力有谐波的、周期性的和非周期性的，本节首先讨论系统在谐波激励下的响应。之所以先讨论在谐波激励下的响应，是因为谐波激励是最简单的激励，任何周期激励总可以展开成傅里叶（Fourier）级数，即展开成一系列谐波激励的叠加。而对任意非周期性激励作 Fourier 变换，可知它们就是 Fourier 级数的极限形式。我们所讨论的系统是线性的，满足叠加原理。因此，只要将系统在谐波激励下的响应讨论清楚了，那么，系统在周期性激励下的和非周期性激励下的响应就可应用叠加原理方便地求出。

1. 系统在谐波激励下的响应

将激励力记为：$F(t) = F\cos\omega t = kA\cos\omega t = kf(t)$，显然此时 $f(t)$ 具有位移的量纲，且 $A = F/k$ 表示恒力 F 作用在系统上时所引起的系统的静位移。

根据式（1－1）和式（1－7），系统的运动微分方程可改写为

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \omega_n^2f(t) = \omega_n^2A\cos\omega t \tag{1-26}$$

设上式的解为

$$x(t) = X\cos(\omega t - \varphi) \tag{1-27}$$

将式（1－27）代入式（1－26），得

$$\begin{aligned}&X[(\omega_n^2 - \omega^2)\cos\varphi + 2\xi\omega_n\omega\sin\varphi]\cos\omega t + \\ &X[(\omega_n^2 - \omega^2)\sin\varphi - 2\xi\omega_n\omega\cos\varphi]\sin\omega t \\ &= \omega_n^2A\cos\omega t\end{aligned} \tag{1-28}$$

由于式（1－28）对任意时刻 t 都应成立，因此等式两边 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 对应项的系数应相等，于是得

$$\left.\begin{aligned}X[(\omega_n^2 - \omega^2)\cos\varphi + 2\xi\omega_n\omega\sin\varphi] = \omega_n^2A \\ X[(\omega_n^2 - \omega^2)\sin\varphi - 2\xi\omega_n\omega\cos\varphi] = 0\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

以上两式联立得

$$X = \frac{A}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+(2\xi\omega/\omega_n)^2}} \tag{1-30}$$

$$\varphi = \arctan\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{1-31}$$

由以上的讨论可知，单自由度线性系统在谐波激励下的响应仍然是谐波的，且响应频率与激励频率相同；响应滞后于激励一个由式(1-31)给出的相位差 φ，它既是系统特性 ω_n、ξ 的函数，也是激励频率 ω 的函数。注意 φ 与系统对初始条件的自由振动响应中的初相位 ψ 有本质的差异，这里的相位差是由系统的惯性引起的，一般系统的响应总是滞后于激励，滞后的时间为 φ/ω；响应的振幅除了与系统的固有特性 ω_n 和 ξ 有关外，还与激励频率 ω 有关，如果记

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+(2\xi\omega/\omega_n)^2}} \tag{1-32}$$

则 $|H(\omega)|$ 表示系统响应的振幅 X 与系统在恒力 F 作用下的静态位移之比，故称 $|H(\omega)|$ 为系统的放大因子。

仔细研究放大因子 $|H(\omega)|$ 和相位差 φ 随系统特性 ω_n、ξ 及激励频率 ω 的变化而变化的规律，可以得出许多有价值的结果。为此，下而研究 $|H(\omega)|$ 和 φ 随 ω_n、ξ、ω 的变化性态。

(1) $|H(\omega)|$ 随 ω_n、ξ、ω 的变化情况

以激励频率 ω 与系统无阻尼时的固有频率 ω_n 之比为横坐标，$|H(\omega)|$ 为纵坐标，根据式(1-32)给出的不同 ξ 时的曲线，如图1-5所示。由于 $|H(\omega)|$ 直接反映系统响应的振幅，因此这些曲线称为幅频特性曲线，$|H(\omega)|$ 也就称为系统的幅频特性。

图1-5中的幅频特性曲线显然具有以下特性：

① 当 $\omega/\omega_n \ll 1$ 时，即系统的激励频率很低时，$|H(\omega)| \to 1$，特别当 $\omega=0$ 时，$|H(\omega)|=1$。因此，不论系统的 ξ 值如何，所有曲线均从 $|H(0)|=1$ 开始。$|H(\omega)| \approx 1$ 的物理意义是：系统响

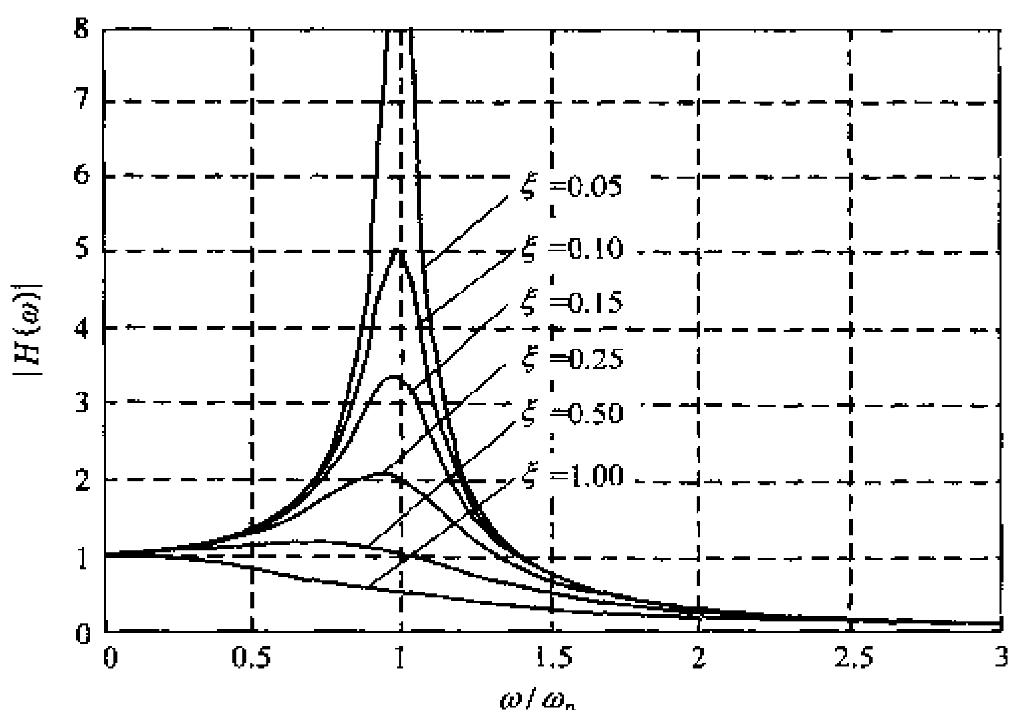


图 1－5　幅频特性曲线

应的振幅 X 约等于系统在恒力 F 作用下的静态位移 A，而 F 给定后，A 的大小主要取决于系统的静刚度 k，因此 $\omega/\omega_n \ll 1$ 的区域称为“刚度区”，或“刚度控制区”。即系统在这一区域内的特性主要由系统的刚度决定。

② 当 $\omega/\omega_n \gg 1$ 时，即激励频率很高时，$|H(0)|<1$，特别当 $\omega \to \infty$ 时，$|H(\omega)| \to 0$。这是由于系统惯性很大，来不及对高频激励作出反应，因此 $\omega/\omega_n \gg 1$ 的区域称为“惯性区”，或“质量控制区”。系统在该区域中的特性主要由系统的惯性决定。

③ 当 $\omega/\omega_n \approx 1$ 时，即激励频率 ω 约等于系统的无阻尼固有频率 ω_n 时，幅频特性曲线出现峰值。响应的振幅 X 会高出系统在恒力 F 作用下的静态位移 A 许多倍。比较不同 ξ 即不同阻尼的特性曲线可知，峰值的大小受阻尼比 ξ 的影响很大。ξ 越小，峰值越大；ξ 越大，峰值越小。改变系统阻尼，可以有效地控制响应的振幅。因此，这一区域称为“阻尼控制区”。其物理意义是：该区域中系统的特性主要由系统的阻尼决定。

④ 在阻尼控制区内，峰值所对应的横坐标值随 ξ 的不同而不

同，峰值的大小也随ξ的不同而不同，到底在什么频率比时出现峰值，峰值的大小如何？为回答这一问题，求$|H(\omega)|$对ω的导数，并令其等于零，得峰值对应的激励频率为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \tag{1-33}$$

将式(1-33)给出的激励频率再代回到$|H(\omega)|$的表达式中，得$|H(\omega)|$的峰值为

$$|H(\omega_r)| = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \tag{1-34}$$

上面的分析说明，当激励频率$\omega = \omega_r$时，$|H(\omega)|$出现峰值$|H(\omega_r)|$，此时我们说系统发生共振。ω_r称为共振频率，$A|H(\omega_r)|$称为系统的共振振幅。系统的共振频率ω_r与系统无阻尼时的固有频率ω_n，及系统有阻尼时的固有频率$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\omega_n$，三者之间的关系为

$$\omega_r < \omega_d < \omega_n \tag{1-35}$$

上式说明三者是不重合的。由式(1-35)不难看出，当$1 - 2\xi^2 < 0$即$\xi > 1/\sqrt{2}$时，ω_r不存在。这说明当$\xi > 1/\sqrt{2}$时，系统不会发生共振，且此时$|H(\omega)| < 1$。

⑤ 由式(1-33)知，当$\xi \ll 1$时，$\omega_r \approx \omega_n$，共振峰值$|H(\omega_r)| \approx |H(\omega_n)|$，记$Q = |H(\omega_n)|$，则有

$$Q = |H(\omega_n)| \approx \frac{1}{2\xi} \tag{1-36}$$

Q称为系统的品质因子。如图1-6所示，在峰值两侧，$|H(\omega)|$等于$Q/\sqrt{2}$处所对应的频率ω_1、ω_2称为半功率点，ω_1与ω_2之间的频率范围$(\omega_2 - \omega_1)$称为系统的半功率带宽。

根振半功率点的定义及$|H(\omega)|$的表达式，显然应有

$$|H(\omega_{1,2})| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_{1,2}/\omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega_{1,2}/\omega_n)^2}}$$

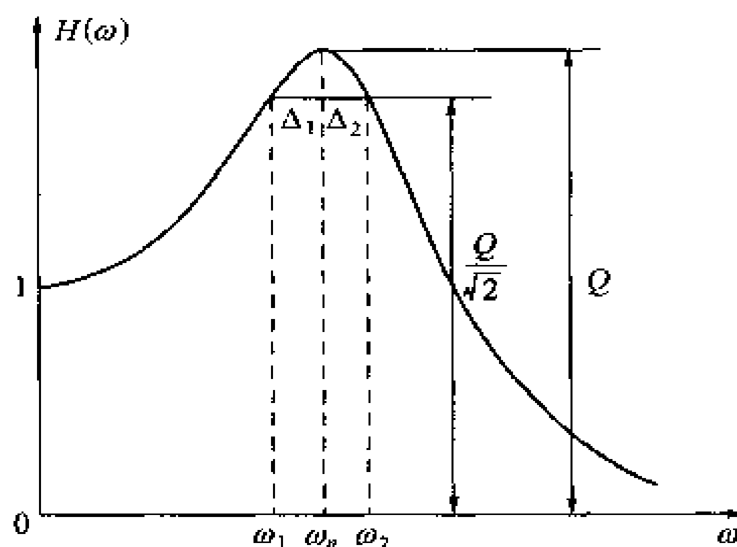


图 1－6　半功率带宽示意图

$$= \frac{Q}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}\xi} \tag{1-37}$$

由上式可推出

$$\xi \approx \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} \tag{1-38}$$

因此，如果通过对系统作扫频激励试验，得出 $|H(\omega)|$ 曲线，在该曲线上找出共振频率 $\omega_r \approx \omega_n$ 和半功率带宽 $(\omega_2 - \omega_1)$ 就可由式(1－38)算出系统的阻尼比 ξ。

(2) $\varphi(\omega)$ 随 ω_n、ξ、ω 的变化情况

式(1－31)描述了系统强迫振动响应 $x(t)$ 和系统谐波激励 $f(t)$ 之间的相位差与系统参数 ω_n、ξ 及激励频率 ω 之间的关系，故称 $\varphi(\omega)$ 为系统的相频特性。以激励频率 ω 与系统无阻尼时的固有频率 ω_n 之比作为横坐标，以 $\varphi(\omega)$ 为纵坐标，根据式(1－31)给出的对应于不同系统阻尼 ξ 的值的相频特性曲线，如图 1－7 所示。由图可知，相频特性曲线具有以下特性：

① 当 $\omega \to 0$ 时，$\varphi(\omega) \to 0$，这说明不论系统的阻尼比 ξ 为何值，相频特性曲线均从 $\varphi(0) = 0$ 开始，低频激励时系统的位移响应 $x(t)$ 与激励 $f(t)$ 之间几乎是同相的，这与前述的“刚度控制区”

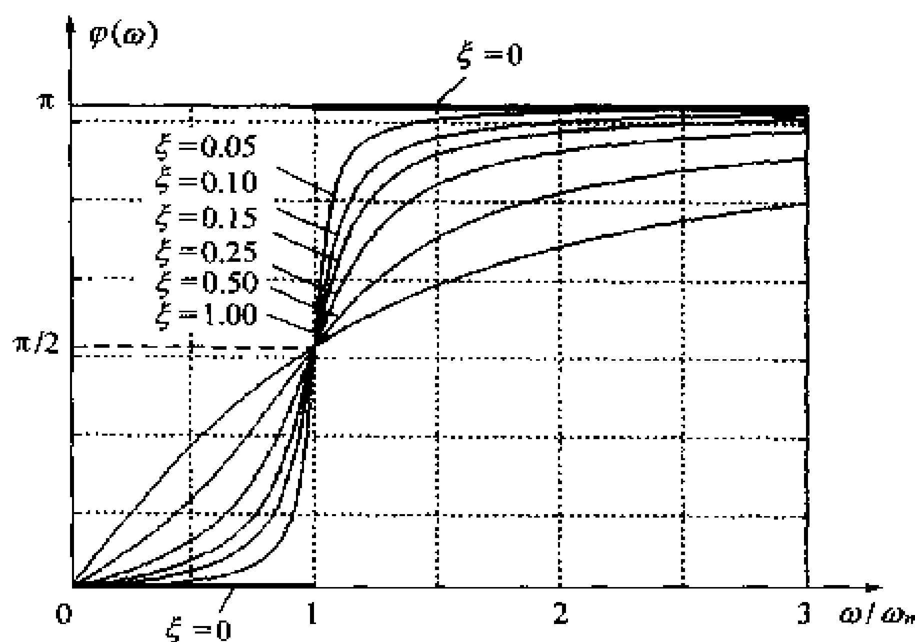


图 1－7　相频特性曲线

中起决定作用的是系统的刚度 k 这一结论是一致的。因为线性弹簧的变形 $x(t)$ 与它所受到的作用力 $f(t)$ 是同相的。

② 当 $\omega \gg \omega_n$ 时，$\varphi(\omega) \to \pi$，即 $x(t)$ 与 $f(t)$ 的相位相反，这与前述的"质量控制区"中起决定作用的是系统的质量 m 这一结论是一致的。因为质块 m 的加速度 $\ddot{x}(t)$ 与其所受到的作用力 $f(t)$ 同相，而加速度 $\ddot{x}(t)$ 恰好是与位移 $x(t)$ 反相的，因此 $x(t)$ 与 $f(t)$ 是反相的。

③ 当 $\omega \approx \omega_n$ 时，$\varphi(\omega) \approx \pi/2$，这正是"阻尼控制区"的特点。实际上阻尼器所受到的作用力与其两端的相对速度 $\dot{x}(t)$ 是同相的，而速度 $\dot{x}(t)$ 与位移 $x(t)$ 恰好相差 $\pi/2$ 的相位差，所以在"阻尼控制区"中位移响应 $x(t)$ 与激励力 $f(t)$ 之间有 $\pi/2$ 的相位差。

④ 由图还可以看出，系统的阻尼比 ξ 越小，上述特征越明显，特别是当 $\xi \to 0$ 时，当 ω 扫过 ω_n 时，φ 由 0°突变到 π，这一现象称为倒相。ξ 越大，相位变化越平缓，特别当 $\xi = \sqrt{2}$ 时，曲线在 $\omega \approx \omega_n$ 处的拐点消失。

2. 系统在周期激励下的响应

上一节所述的谐波函数是一种周期函数，因为它经历基本周

期 T_0 后，又回复到原来的状态。但周期函数是比谐波函数更广泛的一类函数。周期函数 $F(t)$ 的基本特征是 $F(t)=F(nT_0+t)(n=1,2,\cdots)$，其中 T_0 是 $F(t)$ 的基本周期。周期函数可分解为一系列谐波函数的和，即可展开成 Fourier 级数，该级数的每一项均是谐波函数，且其频率均是基本频率的整倍数。前面我们已经详细讨论了单自由度线性系统对任意简谐激励的响应，因此原则上系统对周期激励的 Fourier 级数中每一项的响应均可认为是已知的，现在的问题是如何求出系统对整个周期激励的响应。那么到底系统对各谐波激励的响应之和，与系统对整个周期激励的响应的关系如何？线性系统的叠加原理为我们回答了这一问题。所谓线性系统叠加原理是指如果系统是线性的，它在激励 $F_1(t)$ 作用下的响应为 $x_1(t)$，在激励 $F_2(t)$ 作用下的响应为 $x_2(t)$，则对任意常数 C_1、C_2，系统在激励 $C_1F_1(t)+C_2F_2(t)$ 作用下的响应为 $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$。而式(1-1)所描述的系统是二阶线性系统，叠加原理对系统成立，因此系统对周期激励 $F(t)$ 的响应，就等于系统分别对 $F(t)$ 的 Fourier 级数中各谐波激励的响应之和。

单自由度线性系统在周期激励下的运动微分方程为

$$\ddot{x}(t)+2\xi\omega_n\dot{x}(t)+\omega_n^2x(t)=\omega_n^2f(t) \qquad (1-39)$$

式中　$f(t)$——周期函数。

为简便起见，在下面的分析中，我们形式地记幅值为 A，频率为 ω 的谐波函数为 $Ae^{i\omega t}$，如果实际的简谐函数是正弦的，便取虚部 $A\sin\omega t$；如果简谐函数是余弦的，便取实部 $A\cos\omega t$。而且从更广泛的意义上，可将 A 看作包含相位信息的复数。

周期为 T_0 的周期激励 $f(t)$ 可展开成形如下式的 Fourier 级数

$$f(t)=\sum_{p=1}^{\infty}A_pe^{ip\omega_0t} \qquad (1-40)$$

式中，频率为 $\omega_0=2\pi/T_0$ 的成分称为 $f(t)$ 的“基频”，而频率为 $p\omega_0(p=2,3,\cdots)$ 的成分称为高次谐波。A_p 是频率为 $p\omega_0$ 的 p 次谐波的幅值，它一般是复数。根据 Fourier 级数的展开定理，A_p 由

下式确定

$$A_p = \frac{2}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\omega_0 t}\mathrm{d}t \qquad (p = 1,2,\cdots) \qquad (1-41)$$

单自由度线性系统在频率为 ω、幅值为 A 的谐波 $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的激励下的运动微分方程为

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \qquad (1-42)$$

设 $x(t) = X\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = H(\omega)A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = |H(\omega)|A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)} = |X|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}$，并将其代入上式，求解得

$$H(\omega) = \frac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + \mathrm{i}\cdot 2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} \qquad (1-43)$$

式中：$H(\omega)$ 称为系统的频率响应函数，它描述了线性系统的动态特性。

因此，系统在频率为 $p\omega_0$、幅值为 A_p 的 p 次谐波激励下的复频响应 $H(p\omega_0)$、放大系数 $|H(p\omega_0)|$ 和相位差 $\varphi_p(p\omega_0)$ 分别为

$$H(p\omega_0) = \frac{1}{1-(p\omega_0/\omega_n)^2 + \mathrm{i}\cdot 2\xi p\omega_0/\omega_n} \qquad (1-44)$$

$$|H(p\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{[1-(p\omega_0/\omega_n)^2]^2 + (2\xi p\omega_0/\omega_n)^2}} \qquad (1-45)$$

$$\varphi_p(p\omega_0) = \arctan\frac{2\xi p\omega_0/\omega_n}{1-(p\omega_0/\omega_n)^2} \qquad (1-46)$$

系统在 p 次谐波激励 $A_p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\omega_0 t}$ 作用下的响应 $x_p(t)$ 为

$$\begin{aligned} x_p(t) &= X_p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\omega_0 t} = H(p\omega_0)A_p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\omega_0 t} \\ &= |H(p\omega_0)|A_p\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\omega_0 t-\varphi_p)} = |X_p|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\omega_0 t-\varphi_p)} \end{aligned} \qquad (1-47)$$

再根据叠加原理，系统在式(1－40)所示的一系列谐波的激励下，其响应是这一系列谐波响应的叠加

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{p=1}^{\infty} x_p(t) = \sum_{p=1}^{\infty} X_p e^{ip\omega_0 t} = \sum_{p=1}^{\infty} H(p\omega_0) A_p e^{ip\omega_0 t} \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} |H(p\omega_0)| A_p e^{i(p\omega_0 t - \varphi_p)} \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} |X_p| e^{i(p\omega_0 t - \varphi_p)}
\end{aligned} \tag{1-48}
$$

式中：$|X_p| = |H(p\omega_0)| A_p$，$|H(p\omega_0)|$、$\varphi_p$ 分别由式(1-45)、式(1-46)给出，A_p 由式(1-41)给出。

3. 系统在非周期激励下的响应

求解单自由度线性系统在非周期性激励下的响应的方法通常有两种：一种是 Fourier 变换法；另一种是脉冲响应法。前一种方法的基本思路是，将 $F(t)$ 看作为周期 $T_0 \to \infty$ 时的周期函数，此时系统的基频 $\omega_0 = 1/T_0 \to 0$，依周期函数的 Fourier 级数展开式，此时相邻谐波之间的频率差异 $\Delta\omega = \omega_0 \to 0$，因此 Fourier 级数在 $\omega_0 \to 0$ 的极限情形下成为 Fourier 积分。后者是将非周期性激励 $F(t)$ 看作是无穷多个在不同时刻作用的单位脉冲激励函数的加权和，各脉冲的时间宽度趋于零，其幅值趋于无穷大，但冲量为一个单位，故称为单位脉冲函数。以 $F(t)$ 在各脉冲对应时刻的值作为该脉冲的加权系数，于是 $F(t)$ 可看作为各脉冲激励的加权和。首先求出系统在单位脉冲激励作用下的响应，即求出系统的脉冲响应函数，然后根据线性系统的叠加原理，对所有的脉冲响应作加权和，便可得到系统对非周期性激励 $F(t)$ 的响应。但是，由于各脉冲响应的时间起点是不同的，因此，求和时要考虑各脉冲响应的时间起点。为了方便起见，我们首先讨论 Fourier 变换法求解系统在非周期性激励 $F(t)$ 作用下的响应。然后用脉冲响应函数法讨论系统在非周期性激励 $F(t)$ 作用下的响应问题。

(1) Fourier 变换法

设函数 $f(t)$ 在全部实数轴上有定义，且满足：

① 在任一有限的时间间隔 $(-T/2, T/2)$ 内分段光滑；

② 存在以下形式的积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t$，即 $f(t)$ 绝对可积；

那么，对于所有 t 值，函数 $f(t)$ 可以表示为 Fourier 积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-49}$$

式中

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-50}$$

式(1-49)称为 $f(t)$ 的 Fourier 积分，它反映了 $f(t)$ 的频率结构。由此可见，信号 $f(t)$ 在 $\omega + \mathrm{d}\omega$ 频带中的成分为 $\frac{1}{2\pi}F(\omega)\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，我们可将 $\frac{1}{2\pi}F(\omega)\mathrm{d}\omega$ 看作为复振幅，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 看作为旋转因子。显然 $F(\omega)$ 是在频率 ω 处单位频带宽度的复振幅，因此，称为"频谱密度"。有时又将式(1-49)称为 $f(t)$ 的 Fourier 逆变换，式(1-50)称为 $f(t)$ 的 Fourier 正变换，两式称为 $f(t)$ 的 Fourier 变换对。

由式(1-49)知，激励函数 $f(t)$ 可表示为一系列谐波 $\frac{1}{2\pi}F(\omega)\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 之和，而由 1.1.3.2 节中的讨论知，系统在每一个这样的谐波激励作用下的响应为 $H(\omega) \times \frac{1}{2\pi}F(\omega)\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，由于系统是线性的，因此只要将所有这样的响应叠加起来，就得到系统对 $f(t)$ 的全部响应

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-51}$$

式中：$H(\omega)$ 由式(1-43)给出，$F(\omega)$ 由式(1-50)给出。若记

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \tag{1-52}$$

则可将式(1-51)写为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-53}$$

根据 Fourier 变换对的形式，显然应有

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1-54)$$

即 $x(t)$ 与 $X(\omega)$ 构成 Fourier 变换对，$X(\omega)$ 就是响应 $x(t)$ 的频谱密度。

(2) 脉冲响应法

为了用脉冲响应法研究系统在非周期性激励作用下的响应问题，我们首先讨论零初始条件下单自由度线性系统在单位脉冲作用下的响应，即系统的脉冲响应函数。此时，系统的运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \delta(t) \\ & x_0 = x(0) = 0 \\ & v_0 = \dot{x}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1-55)$$

式中：$\delta(t)$ 为单位脉冲函数，亦称为 Dirac δ - 函数，其定义为

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & t \neq a \\ \infty & t = a \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) dt = 1 \quad (1-56)$$

式(1-56)表示单位脉冲函数的脉冲宽度→0，其幅值→∞，但其作用冲量等于1。

式(1-55)中的零初始条件表示系统初始时处于静止状态，在 $t=0$ 时刻，突然受到 $\delta(t)$ 的作用，由于 $\delta(t)$ 作用的时间极其短促，因此可以将作用结束后的瞬时记作 $t=0^{+}$。按力学中的冲量定理，物体动量的增加等于作用于物体的冲量，因此有

$$m\dot{x}(0^{+}) - m\dot{x}(0) = 1 \quad (1-57)$$

现 $\dot{x}(0)=0$，于是系统经 $\delta(t)$ 作用后，获得了一个初速度

$$\dot{x}(0^{+}) = v_0^{+} = 1/m \quad (1-58)$$

上述分析表明，尽管 $\delta(t)$ 在形式上是一过程激励，但 $\delta(t)$ 的作用时间极短，其最终效果就相当于一个初速度为 $\dot{x}(0^{+}) = 1/$

m,初始位移 $x(0^+)=0$ 的初始激励。因此式(1－55)表示的问题,转化为由下式表示的初值问题

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0;\quad x(0^+)=0;\quad \dot{x}(0^+)=\frac{1}{m} \tag{1-59}$$

由 1.1.2 节中对系统的自由振动响应的讨论,不妨假设系统为小阻尼情形,则可得式(1－59)的解为

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{1-60}$$

式中:ω_d、ξ、ω_n 的定义见 1.1.2 节。

为方便起见,记系统对单位脉冲激励的响应为 $h(t)$,则综合起来可得系统的单位脉冲响应函数为

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \dfrac{1}{m\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t & (t\geqslant 0)\end{cases} \tag{1-61}$$

如果定义单位阶跃函数 $u(t)$ 为

$$u(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geqslant 0)\end{cases} \tag{1-62}$$

则单位脉冲响应函数 $h(t)$ 可表示为

$$h(t)=\frac{u(t)}{m\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{1-63}$$

现在,我们来讨论系统在非周期性激励 $F(t)$ 作用下的响应问题。对如图 1－8 所示的任意激励函数 $F(t)$,可将其看作是一系列脉冲激励的组合,任意时刻 τ 的脉冲力为 $F(\tau)\cdot\Delta\tau\cdot\delta(t-\tau)$,其中 $F(\tau)\Delta\tau$ 相当于冲量值。由以上的分析可知,系统对于 τ 时刻的单位脉冲 $\delta(t-\tau)$ 激励下的响应为 $h(t-\tau)$,因此,系统对冲量为 $F(\tau)\Delta\tau$ 的脉冲激励的响应为 $F(\tau)\cdot\Delta\tau\cdot h(t-\tau)$。由线性系统的叠加原理,显然系统对 t 时刻以前全部脉冲激励响应的和即

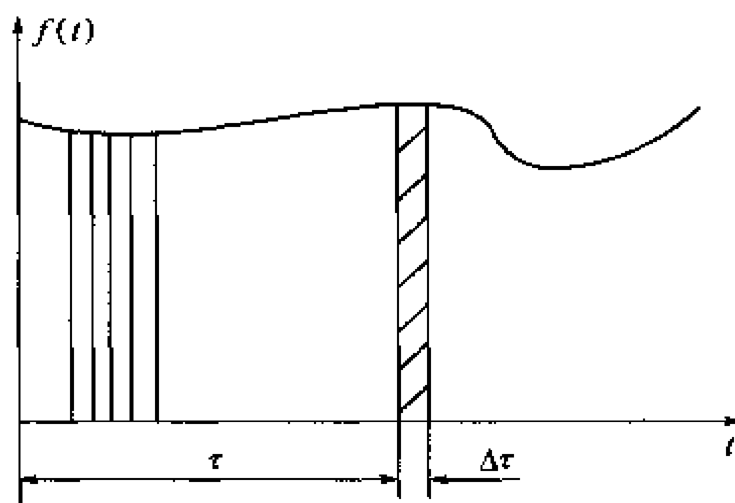


图 1-8　将 $F(t)$ 分解为脉冲激励

为系统对任意激励 $F(t)$ 的响应，现其和为 $\sum_{\tau=0}^{t} F(\tau)\Delta\tau h(t-\tau)$，当 $\Delta\tau\to 0$ 时，求和变为积分，因此系统对任意激励 $F(t)$ 的响应为

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-64}$$

即

$$x(t) = \frac{u(t)}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\mathrm{e}^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-65}$$

式(1-64)所示的积分称为 $F(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分，进一步分析可知，$\int_0^t F(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t h(\tau)F(t-\tau)\mathrm{d}\tau$。$F(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分可记为：$F(t) * h(t)$，因此

$$x(t) = F(t) * h(t) \tag{1-66}$$

比较式(1-52)和式(1-66)，不难看出，在频率域上响应是 $H(\omega)$ 与 $F(\omega)$ 之积，而在时间域上响应是 $F(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积。由于 $X(\omega)$ 与 $x(t)$ 为 Fourier 变换对，显然 $H(\omega)$ 与 $h(t)$ 也应为 Fourier 变换对，实际上，

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-67}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-68}$$

1.2 多自由度系统

实际的振动系统大多是连续弹性体，系统的质量、刚度、阻尼等都具有连续分布的性质。严格地说，在理论上这样的系统具有无限多个自由度，需要用偏微分方程来描述才行。但是在工程实际中，往往将许多这样的系统简化成集总参数系统。例如，舰船上弹性支承的机械设备，由于设备本身的柔度较隔振器的柔度来说小得多，因此，往往将设备本身的弹性忽略不计，将其当作刚体。而描述任一刚体的运动，需要确定刚体质心在空间中的平动及绕通过质心的三根相互垂直的坐标轴的转动，即需要 6 个坐标，即空间中的刚体具有 6 个自由度，因此，弹性支承的机械设备可简化为一个 6 自由度的系统。同理，双层隔振的机械设备可简化为一个 12 自由度的系统，而对浮筏隔振来说，若弹性地安装在筏架上的设备的个数为 n，则系统的自由度数为$(n+1)\times 6$。

1.2.1 系统运动的微分方程组

一般，n 自由度的离散线性振动系统，要用 n 个联立的二阶常微分方程来描述，用矩阵形式表示则具有黏滞阻尼系统的运动微分方程组为

$$[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{F(t)\} \tag{1-69}$$

式中：$[m]$是 n 阶的质量矩阵，由系统的惯性元素组成，它是对称阵，即有 $m_{pq}=m_{qp}, p,q=1,2,\cdots,n$；$[c]$是 n 阶的阻尼矩阵，由系统的阻尼元素组成，它是对称阵，即有 $c_{pq}=c_{qp}, p,q=1,2,\cdots,n$；$[k]$是 n 阶的刚度矩阵，由系统的刚度元素组成，它也是对称阵，即有 $k_{pq}=k_{qp}, p,q=1,2,\cdots,n$；$\{x(t)\}$，$\{\dot{x}(t)\}$，$\{\ddot{x}(t)\}$分别称为系统的广义位移、速度、加速度列矢量，它们均是 n 维的；$\{F(t)\}$称为系统的激励力列矢量，也是 n 维的。

如果$[m]$、$[c]$、$[k]$均是对角矩阵，即它们的所有非对角元素为零，则式(1－69)相当于n个相互独立的二阶常微分方程，任一方程的求解均可按1.1节中的方法进行，各坐标之间没有相互牵连，我们说这样的系统各坐标之间不存在耦合，这当然是我们极力寻求的理想情形。在一般情形下，$[m]$、$[c]$、$[k]$并不为对角矩阵。当$[m]$不为对角阵时，我们说系统存在惯性耦合；当$[k]$不为对角阵时，我们说系统存在弹性耦合；对于阻尼矩阵$[c]$可分两种情况讨论：

其一是等比例阻尼情形，即阻尼矩阵$[c]$可表示成质量矩阵$[m]$和刚度矩阵$[k]$的线性组合，即$[c]$可表示成

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k] \tag{1-70}$$

其二是非等比例阻尼情形，此时我们得在状态空间中来求解式(1－69)。

值得一提的是，坐标的耦合并不是线性系统的固有特性，系统是否存在耦合与坐标选择有关。一个特定的系统，在某组坐标下可能存在惯性耦合，但在另一组坐标下可能只存在弹性耦合。下面的讨论就是如何选择坐标，使系统既不存在惯性耦合，也不存在弹性耦合。

1.2.2 无阻尼系统的自由振动特征值问题

n自由度无阻尼振动系统作自由振动时的运动微分方程组为

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{0\} \tag{1-71}$$

不妨设系统存在某种形式的同步解，即设

$$\{x(t)\} = \{u\}f(t) \tag{1-72}$$

式中：$\{u\}$为常系数矢量，将上式代入式(1－71)，得

$$[m]\{u\}\ddot{f}(t) + [k]\{u\}f(t) = \{0\} \tag{1-73}$$

上式表示n个齐次方程，分开来写有

$$\ddot{f}(t)\sum_{q=1}^{n} m_{pq}u_q + f(t)\sum_{q=1}^{n} k_{pq}u_q = 0 \qquad (p = 1,2,\cdots,n)$$

$$(1-74)$$

对上式分离变量,得

$$\frac{-\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{q=1}^{n} k_{pq}u_p}{\sum_{q=1}^{n} m_{pq}u_p} \qquad (p = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-75)$$

式(1－75)的左端仅与时间 t 有关,右端仅与系统的刚度系数、质量系数及各坐标位移的常系数部分有关,要使式(1－75)在任何时刻都成立,其两端必须等于同一常数。又由于 $f(t)$ 是实函数,因此该常数必为实数,不妨假设其为 λ,于是由式(1－75)得

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0; \quad \sum_{q=1}^{n}(k_{pq} - \lambda m_{pq})u_q = 0$$

$$(p = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-76)$$

式(1－76)中第一式的解为

$$f(t) = c\cdot\cos(\omega t - \psi) \qquad (1-77)$$

式中:$\omega = \sqrt{\lambda}$,它是实数,为简谐运动的频率;c、ψ 为任意常数。

将 $\lambda = \omega^2$ 代入式(1－76)的第二式,得

$$\sum_{q=1}^{n}(k_{pq} - \omega^2 m_{pq})u_q = 0 \quad (p = 1,2,\cdots,n) \quad (1-78)$$

式(1－78)为 $u_q(q=1,2,\cdots,n)$ 的齐次线性方程组,将其写成矩阵形式,则为

$$([k] - \omega^2[m])\{u\} = \{0\} \qquad (1-79)$$

根据线性代数的知识,要使 $\{u\} \neq \{0\}$ 有非平凡解,则 $\{u\}$ 的系数行列式必须为零,于是得系统的特征方程为

$$\det([k] - \omega^2[m]) = 0 \qquad (1-80)$$

上式是 ω^2 的 n 次代数方程，如果刚度矩阵 $[k]$ 和质量矩阵 $[m]$ 是正定的实对称矩阵，则式(1-80)的 n 个根均为正实根，它们对应于系统的 n 个自振频率。假设系统没有重根，则按由小至大的顺序将各个根排列起来，有

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \cdots < \omega_n^2$$

式中：ω_1 称为系统的基频；$\lambda_r = \omega_r^2 (r = 1,2,\cdots,n)$ 称为系统的 n 个特征值。

将各特征值代入式(1-79)，可求得各 $\lambda_r = \omega_r^2$ 对应的特征矢量 $\{u^{(r)}\}$，$\{u^{(r)}\}$ 又称为系统的模态矢量或振型矢量。第 r 阶自振频率 ω_r 及其对应的模态矢量 $\{u^{(r)}\}$ 就构成系统的第 r 阶模态，它表征了系统的一种同步运动的模式。由于系统共有 n 个自振频率 $\omega_r (r=1,2,\cdots,n)$ 及其对应的模态矢量 $\{u^{(r)}\}(r=1,2,\cdots,n)$，因此系统共存在 n 种同步运动的模式，每一种同步运动均为简谐运动，其作简谐运动的频率为 ω_r，各坐标间的相互关系为 $\{u^{(r)}\}$。系统的第 r 种同步运动可记为

$$\{x(t)^{(r)}\} = \{u^{(r)}\}\cos(\omega_r t - \psi_r) \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \tag{1-81}$$

式(1-81)中省去了常数 c_r，是因为 $\{u^{(r)}\}$ 本身含有一个待定的任意常数，它没有给出各坐标的绝对振幅，只给出了各坐标间的相对振幅，其中 ψ_r 是待定的任意常数。

由于式(1-81)是齐次方程，依线性代数的知识，齐次方程的解的线性组合也是该方程的解，因此无阻尼系统自由振动的通解为

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^{n} c_r \{u^{(r)}\}\cos(\omega_r t - \psi_r) \tag{1-82}$$

式中：c_r、$\psi_r (r=1,2,\cdots,n)$ 是由初始条件确定的任意常数。

必须注意的是，以上求出的特征矢量 $\{u^{(r)}\}$ 本身含有一个任意常数，因此，它只是规定了该矢量在空间中的取向，并没有规定

该矢量的大小,这为我们对其进行正规化或归一化处理留了一定的余地。为讨论特征矢量的正规化问题,我们先讨论特征矢量的一条重要特性,即它们对质量矩阵[m]和对刚度矩阵[k]的正交性。

假设 ω_r 和 ω_s 是 n 自由度无阻尼系统的两个不同的固有频率,即 $\omega_r \neq \omega_s$,它们对应的特征矢量为 $\{u^{(r)}\}$ 和 $\{u^{(s)}\}$。则由式(1-79),有

$$\left.\begin{aligned}[k]\{u^{(r)}\} &= \omega_r^2[m]\{u^{(r)}\}\\ [k]\{u^{(s)}\} &= \omega_s^2[m]\{u^{(s)}\}\end{aligned}\right\} \tag{1-83}$$

对式(1-83)的第一式左乘 $\{u^{(s)}\}^{\mathrm{T}}$ 并取转置,第二式左乘 $\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}$,并考虑到[m]、[k]均是对称阵,它们的转置就等于其自身,可得

$$\left.\begin{aligned}\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{u^{(s)}\} &= \omega_r^2\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{u^{(s)}\}\\ \{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{u^{(s)}\} &= \omega_s^2\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{u^{(s)}\}\end{aligned}\right\} \tag{1-84}$$

将式(1-84)的第一式减去第二式得

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{u^{(s)}\} = 0 \tag{1-85}$$

由于 $(\omega_r^2 - \omega_s^2) \neq 0$,故必有

$$\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{u^{(s)}\} = 0 \qquad (r,s = 1,2,\cdots,n;r \neq s) \tag{1-86}$$

将式(1-86)代入式(1-84)的任一式,可得

$$\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{u^{(s)}\} = 0 \qquad (r,s = 1,2,\cdots,n;r \neq s) \tag{1-87}$$

式(1-86)和式(1-87)就称为特征矢量对质量矩阵[m]和刚度矩阵[k]的正交性。

由于[m]和[k]为实对称矩阵,因此 $\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{u^{(r)}\}$、$\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{u^{(r)}\}$ $(r=1,2,\cdots,n)$ 均为正实数。记

$$\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{u^{(r)}\} = M_r \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \tag{1-88}$$

$$\{u^{(r)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{u^{(r)}\} = K_r \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \tag{1-89}$$

M_r 和 K_r 分别称为系统的第 r 阶模态质量和第 r 阶模态刚度。由式(1－84)知，系统第 r 阶模态频率 ω_r 与 M_r、K_r 的关系为

$$\omega_r = \sqrt{\frac{K_r}{M_r}} \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \tag{1-90}$$

因此对于系统的第 r 阶模态来说，模态频率与模态质量、模态刚度的关系与单自由度系统是一样的。

下面我们讨论模态矢量的正规化即归一化问题。前面已经说过，第 r 阶模态矢量 $\{u^{(r)}\}$ 中存在一个可取任意值的比例因子，为方便起见，不妨在 $\{u^{(r)}\}$ 中遍除 $\sqrt{M_r}$ 作为对 $\{u^{(r)}\}$ 的规一化处理，并仍记归一化处理后的模态矢量为 $\{u^{(r)}\}$，则由前面的讨论知，下述等式成立

$$\left.\begin{aligned} \{u^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[m]\{u^{(r)}\} &= \delta_{rs} \\ \{u^{(s)}\}^{\mathrm{T}}[k]\{u^{(r)}\} &= \omega_r^2\delta_{rs} \end{aligned} \quad (r,s = 1,2,\cdots,n)\right\} \tag{1-91}$$

若记系统的模态矩阵为

$$[u] = (\{u^{(1)}\},\{u^{(2)}\},\cdots,\{u^{(n)}\}) \tag{1-92}$$

则显然有

$$\left.\begin{aligned} [u]^{\mathrm{T}}[m][u] &= [I] \\ [u]^{\mathrm{T}}[k][u] &= \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{1-93}$$

1.2.3 等比例黏滞阻尼系统的自由振动响应

n 自由度等比例黏滞阻尼系统作自由振动时的运动微分方程为

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{0\} \tag{1-94}$$

式中 $[c]=\alpha[m]+\beta[k]$。

设系统对应的无阻尼系统作自由振动时的运动微分方程为式(1-71)。由上节的讨论知，我们可以求出无阻尼系统的固有频率 $\omega_r(r=1,2,\cdots,n)$，及对应的归一化了的模态矢量 $\{u^{(r)}\}(r=1,2,\cdots,n)$。以 $\{u^{(r)}\}$ 作为列矢量，按顺序排列可组成系统的模态矩阵 $[u]$，如式(1-92)所示。模态矩阵 $[u]$ 对质量矩阵 $[m]$、刚度矩阵 $[k]$ 的正交性如式(1-93)所示。

不妨假定等比例黏滞阻尼系统的初始条件为

$$\{x(0)\}=\{x_0\};\quad \{\dot{x}(0)\}=\{\dot{x}_0\} \tag{1-95}$$

为求式(1-94)在式(1-95)所给出的初始条件下的解，首先得对原系统进行坐标变换，使在原物理空间中相互耦合的常微分方程组变换为以模态矢量为基矢量的空间中相互独立的 n 个常微分方程。在该空间中对每个方程均用1.1节中的解法求出自由振动响应，然后再作反变换，求得在原物理空间中的解。为此在式(1-94)中作坐标变换

$$\{x(t)\}=[u]\{\eta(t)\} \tag{1-96}$$

将式(1-96)代入式(1-94)，并左乘 $[u]^{T}$，得

$$([u]^{T}[m][u])\{\ddot{\eta}(t)\}+([u]^{T}[c][u])\{\dot{\eta}(t)\}+([u]^{T}[k][u])\{\eta(t)\}=\{0\} \tag{1-97}$$

将式(1-93)代入式(1-97)，并考虑到

$$\begin{aligned}[u]^{T}[c][u]&=[u]^{T}(\alpha[m]+\beta[k])[u]\\&=\alpha([u]^{T}[m][u])+\beta([u]^{T}[k][u])\\&=\alpha[I]+\beta\begin{bmatrix}\ddots&&\\&\omega_r^2&\\&&\ddots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddots&&\\&2\xi\omega_r&\\&&\ddots\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1-98}$$

式中

$$\xi_r = \frac{\alpha + \beta\omega_r^2}{2\omega_r} \tag{1-99}$$

则式(1-97)变为

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\xi_r\omega_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\{\dot{\eta}(t)\} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\{\eta(t)\} = \{0\}$$

$$(1-100)$$

式中$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\xi_r\omega_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$均是对角矩阵,因此各坐标间没有耦合,式(1-100)相当于 n 个独立的常微分方程

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\{\dot{\eta}_r(t)\} + \omega_r^2\eta_r(t) = \{0\} \qquad (r = 1,2,\cdots,n)$$

$$(1-101)$$

在式(1-96)中左乘$[u]^{\mathrm{T}}[m]$,得

$$([u]^{\mathrm{T}}[m][u])\{\eta(t)\} = ([u]^{\mathrm{T}}[m])\{x(t)\}$$

$$(1-102)$$

考虑到式(1-93),得

$$\{\eta(t)\} = ([u]^{\mathrm{T}}[m])\{x(t)\} \tag{1-103}$$

因此,式(1-101)的初始条件为

$$\left.\begin{aligned} \{\eta(0)\} &= \{\eta_0\} = ([u]^{\mathrm{T}}[m])\{x_0\} \\ \{\dot{\eta}(0)\} &= \{\dot{\eta}_0\} = ([u]^{\mathrm{T}}[m])\{\dot{x}_0\} \end{aligned}\right\} \tag{1-104}$$

根据 1.1.2 节中的讨论知,式(1-101)的解为

$$\begin{aligned} \eta_r(t) &= c_r e^{-\xi_r\omega_r t}\cos(\omega_{dr}t - \psi_r) \\ &= e^{-\xi_r\omega_r t}(c_r\cos\psi_r\cos\omega_{dr}t + c_r\sin\psi_r\sin\omega_{dr}t) \end{aligned}$$

$$(r = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-105)$$

式中

$$\omega_{dr} = \sqrt{1-\xi_r^2}\omega_r \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-106)$$

令式(1 - 105)中 $t=0$,有

$$\eta_r(0) = c_r\cos\psi_r \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-107)$$

求式(1 - 105)对时间 t 的导数,得

$$\dot{\eta}_r(t) = \\ -\xi_r\omega_r\eta_r(t) + e^{-\xi_r\omega_r t}(c_r\omega_{dr}\sin\psi_r\cos\omega_{dr}t - c_r\omega_{dr}\cos\psi_r\sin\omega_{dr}t) \qquad (1-108)$$

于是

$$\dot{\eta}_r(0) = -\xi_r\omega_r \cdot c_r\cos\psi_r + c_r\omega_{dr}\sin\psi_r \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-109)$$

综合考虑式(1 - 104)的第一式和式(1 - 107),得

$$c_r\cos\psi_r = \{u^{(r)}\}[m]\{x_0\} \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-110)$$

综合考虑式(1 - 104)的第二式、式(1 - 109)和式(1 - 110),可得

$$c_r\sin\psi_r = \frac{1}{\omega_{dr}}\{u^{(r)}\}^{T}[m](\{\dot{x}_0\} + \xi_r\omega_r\{x_0\}) \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-111)$$

将式(1 - 110)和式(1 - 111)代入式(1 - 105)得

$$\begin{aligned}\eta_r(t) &= e^{-\xi_r\omega_r t}\Big[\{u^{(r)}\}^{T}[m]\{x_0\}\cos\omega_{dr}t + \\ &\quad \frac{1}{\omega_{dr}}\{u^{(r)}\}^{T}[m](\{\dot{x}_0\} + \xi_r\omega_r\{x_0\})\sin\omega_{dr}t\Big] \\ &= e^{-\xi_r\omega_r t}\{u^{(r)}\}^{T}[m]\Big[\{x_0\}\cos\omega_{dr}t + \\ &\quad \frac{1}{\omega_{dr}}(\{\dot{x}_0\} + \xi_r\omega_r\{x_0\})\sin\omega_{dr}t\Big] \qquad (r = 1,2,\cdots,n)\end{aligned} \qquad (1-112)$$

显然，求出了在模态坐标中的自由振动响应 $\eta_r(t)$ $(r=1,2,\cdots,n)$后，由式(1-96)可以很方便地求出在物理坐标中的自由振动响应。

1.2.4 等比例黏滞阻尼系统的强迫振动响应

具有等比例黏滞阻尼的 n 自由度线性振动系统作强迫振动时，其矩阵形式的运动微分方程为式(1-69)，其中$[c]=\alpha[m]+\beta[k]$。该系统作强迫振动时的通解应为在初始条件下作自由振动的通解与作强迫振动时的特解的叠加。上节中我们已经给出了该系统在初始条件下作自由振动时的通解，由式(1-112)知，该解包含了一个指数衰减因子，因此时间稍长一点，该解会自然衰减至零，因此本节我们所讨论的系统强迫振动响应只考虑系统作强迫振动的特解。

为求解式(1-69)，显然我们首先得求解式(1-69)所对应的无阻尼系统作自由振动时的特征值问题式现假设通过对式(1-71)的特征值分析，已求出了系统的固有频率 ω_r $(r=1,2,\cdots,n)$及对应的对质量矩阵归一化了的模态矢量$\{u^{(r)}\}$ $(r=1,2,\cdots,n)$。

为对式(1-69)解耦，作形如式(1-96)的坐标变换，并前乘$[u]^T$，则式(1-69)变为

$$([u]^T[m][u])\{\ddot{\eta}(t)\}+([u]^T[c][u])\{\dot{\eta}(t)\}+ \\ ([u]^T[k][u])\{\eta(t)\}=[u]^T\{F(t)\} \qquad (1-113)$$

将式(1-93)和式(1-98)代入上式，得

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\}+\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & 2\xi_r\omega_r & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\{\dot{\eta}(t)\}+\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\{\eta(t)\} \\ =[u]^T\{F(t)\} \qquad (1-114)$$

上式相当于 n 个独立的单自由度系统作强迫振动的运动方程，即

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2\eta_r(t) = \{u^{(r)}\}\{F(t)\}$$
$$(r = 1,2,\cdots,n) \qquad (1-115)$$

不管上式右端是简谐激励、周期性激励，还是非周期性激励，其解的求法及解的形式在 1.1 节中讨论单自由度系统时均给出了。因此式(1－115)的解可以认为是已知的。求出了 $\eta_r(t)$ $(r = 1,2,\cdots,n)$后，运用式(1－96)，不难求出系统在物理坐标中的解 $\{x(t)\}$。

1.2.5 一般黏滞阻尼系统

实际系统中存在的阻尼不一定是等比例黏滞阻尼。特别是柔性支承系统，各种隔振器和弹性连接件等的材料、规格不尽相同，受力状态也不尽相同，而且同种材料的阻尼系数在拉伸、剪切等不同阻尼机理下差别相当大，故实际系统大都不是等比例黏滞阻尼系统。此时系统同时存在惯性耦合、弹性耦合、阻尼耦合。用主振型分解法不能使其同时解耦，下面就用 K. A. Foss 在 1957 年提出的降价法来讨论一般黏滞阻尼系统的响应问题。

系统的运动微分方程仍为式(1－69)，其中$[m]$、$[c]$、$[k]$均是对称正定的，但$[c]$与$[k]$、$[m]$的线性组合不成比例关系。令

$$[R] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix}, [S] = \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix}$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}, \{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$$

则式(1－69)可写为

$$[R]\cdot\{\dot{Z}\} + [S]\cdot\{Z\} = \{Q(t)\} \qquad (1-116)$$

它的齐次形式为

$$[R]\cdot\{\dot{Z}\} + [S]\cdot\{Z\} = \{0\} \qquad (1-117)$$

式(1－116)是$\{Z\}$的一阶微分方程组，其中$[R]$、$[S]$是$2n\times 2n$的方阵，$\{Z\}$、$\{\dot{Z}\}$、$\{Q(t)\}$是$2n\times 1$的列矢量。令

$$\{Z(t)\} = e^{\alpha t}\{\Phi\} \qquad (1-118)$$

并将其代入式(1－117)，得

$$\alpha[R]\cdot\{\Phi\} + [S]\cdot\{\Phi\} = \{0\} \qquad (1-119)$$

因为$[m]$、$[k]$正定对称，故$[S]$非奇异，因而上式可写为

$$-[S]^{-1}[R]\cdot\{\Phi\} = \frac{1}{\alpha}\{\Phi\} \qquad (1-120)$$

式中：$[S]^{-1}=\begin{bmatrix}-[m]^{-1} & [0]\\ [0] & [k]^{-1}\end{bmatrix}$。令$[U]=-[S]^{-1}\cdot[R]=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[a]\cdot[m] & -[a]\cdot[c]\end{bmatrix}$，其中$[a]=[k]^{-1}$为系统的柔度矩阵。从而得

$$[U]\cdot\{\Phi\} = \frac{1}{\alpha}\{\Phi\} \qquad (1-121)$$

上式是矩阵$[U]$的标准特征值问题，由它可以求出$2n$个特征值$\alpha_j(j=1,2,\cdots,2n)$，以及相应的$2n$个特征矢量

$$\{\Phi^{(j)}\} = \begin{Bmatrix}\alpha_j(\Phi^{(j)})\\ (\Phi^{(j)})\end{Bmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,2n) \qquad (1-122)$$

显然对于稳定系统来说，α_j或者是负实数，或者是具有负实部的复数，而且复根是作为共轭对出现的，相应的特征矢量也是复共轭对的形式。假设系统不存在刚体振型，因此α_j总是具有负的实部的复根，且作为复共轭对同时出现，相应的特征向量也是复共轭的。

假定系统没有重根，考虑到$[m]$、$[c]$、$[k]$是对称矩阵，故$[R]$、$[S]$也是对称阵，则容易得出特征矢量分别与$[R]$、$[S]$有如

下的正交性关系

$$\begin{cases}\{\Phi^{(j)}\}^{\mathrm{T}}\cdot[R]\cdot\{\Phi^{(k)}\}=0\\\{\Phi^{(j)}\}^{\mathrm{T}}\cdot[S]\cdot\{\Phi^{(k)}\}=0\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,2n;k=1,2,\cdots,2n;j\neq k)$$

(1 - 123)

上式的正交性关系,可作为选择清除矩阵的标准,从振型矩阵中除去那些不正交的列矢量。当 α_j 有重根时,亦可作为选择相应的相互正交的特征矢量的标准。值得特别注意的是,上面的正交性关系是在 α_j 不等于零的条件下成立的。这一点由[S]可逆就得到了保证。因为[S]可逆,故[U]存在,系统的特征值问题可写为:$\alpha[U]\cdot\{\Phi\}=\{\Phi\}$。显然若有某一 α_j 等于零,那么自然有$\{\Phi^{(j)}\}=\{0\}$,即出现平凡解,矛盾! 故实际系统 $\alpha_j\neq0(j=1,2,\cdots,2n)$。

用特征矢量组成模态矩阵$[\Phi]=\{\{\Phi^{(1)}\},\{\Phi^{(2)}\},\cdots,\{\Phi^{(2n)}\}\}$。令式(1 -116)中的$\{Z\}=[\Phi]\cdot\{\xi(t)\}$,考虑到正交性关系,记

$$R_m=\{\Phi^{(m)}\}^{\mathrm{T}}\cdot[R]\cdot\{\Phi^{(m)}\}\qquad(1-124)$$

$$\overline{Q}_m=\{\Phi^{(m)}\}^{\mathrm{T}}\cdot\{Q(t)\}\qquad(1-125)$$

便可得

$$R_m\dot{\xi}_m(t)-\alpha_mR_m\xi_m(t)=\overline{Q}_m(t)\qquad(m=1,2,\cdots,2n)$$

(1 - 126)

上式的特解为

$$\xi_{j特}=\frac{1}{R_j}\int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)}\cdot\overline{Q}_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau\qquad(j=1,2,\cdots,2n)$$

(1 - 127)

此特解部分对$\{Z\}$的贡献为:$\{Z\}_{特}=[\Phi]\cdot\{\xi_{特}(t)\}$,即

$$Z_{k特}=\sum_{j=1}^{2n}\Phi_k^{(j)}\cdot\xi_{j特}(t)\qquad(k=1,2,\cdots,2n)$$

(1 - 128)

于是

$$x_{k特} = \sum_{j=1}^{2n} \Phi_k^{(j)} \cdot \xi_{j特}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{R_j}\Phi_k^{(j)} \cdot \int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} \cdot \overline{Q}_j(\tau)\,d\tau \quad (k = n, n+1, \cdots, 2n)$$

(1-129)

设 $t=0$ 时，$\{x\}=\{x_0\}$，$\{\dot{x}\}=\{\dot{x}_0\}$，即 $\{Z\}\big|_{t=0}=\{Z_0\}$，于是 $\{\xi_0\}=\{\xi(t)\}\big|_{t=0}=[\Phi]^{-1}\{Z_0\}$。可得式(1-126)。

自由振动的解为

$$\xi_{j自} = \xi_{0j} \cdot e^{\alpha_j t} \quad (j = 1, 2, \cdots, 2n) \qquad (1-130)$$

由上式得

$$x_{k自} = \sum_{j=1}^{2n} \Phi_k^{(j)} \cdot \xi_{j自}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \Phi_k^{(j)} \cdot \xi_{0j} \cdot e^{\alpha_j t} \quad (k = n, n+1, \cdots, 2n)$$

(1-131)

最后得问题的通解为

$$x_k = x_{k自} + x_{k特}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \Phi_k^{(j)} \cdot \left(\xi_{0j} e^{\alpha_j t} + \frac{1}{R_j}\int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} \overline{Q}_j(\tau)\,d\tau\right) \quad (k = n, n+1, \cdots, 2n) \qquad (1-132)$$

由于系统存在阻尼，自由振动很快会被衰减掉，故只需考虑 $x_{k特}$ 即可。下面只讨论

$$x_k = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{R_j} \cdot \Phi_k^{(j)} \cdot \int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} \overline{Q}_j(\tau)\,d\tau$$

$$(k = n, n+1, \cdots, 2n) \qquad (1-133)$$

由于上式中 R_j、$\Phi_k^{(j)}$、α_j、$\overline{Q}_j$ 均是复共轭的，故可将上式中的求和分作两步进行，首先将复共轭的两项相加，然后将 n 个这样的复共轭的和加起来。为此，设角标为 m 与 $m+1$ 的是一对复共轭，它们对 x_k 的贡献为

$$B_m = \sum_{j=m}^{m+1} \frac{1}{R_j}\Phi_k^{(j)} \cdot \int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} \cdot \overline{Q}_j(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{R_m}\Phi_k^{(m)} \int_0^t e^{\alpha_m(t-\tau)} \cdot \overline{Q}_m(\tau)\,d\tau + \frac{1}{R_m^*}\Phi_k^{*(m)} \cdot$$

$$\int_0^t e^{\alpha_m^*(t-\tau)} \cdot \overline{Q}_m^*(\tau)\,d\tau$$

令

$$\Phi_k^{(m)} = |\Phi_k^{(m)}| \cdot e^{i\theta_{mk}}; \quad \overline{Q}_m(\tau) = |\overline{Q}_m(\tau)| \cdot e^{i\theta_{fm}}$$

$$R_m = |R_m| \cdot e^{i\theta_{rm}}; \quad \alpha_m = -\eta_m + i\omega_m$$

那么

$$B_m = \frac{2}{|R_m|} \int_0^t e^{-\eta_m(t-\tau)} \cdot |\overline{Q}_m(\tau)| \cdot |\Phi_k^{(m)}| \cdot$$

$$\cos(\omega_m(t-\tau) - \theta_{rm} + \theta_{mk} + \theta_{fm}) \cdot d\tau$$

得

$$x_k = \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{|R_m|} \int_0^t e^{-\eta_m(t-\tau)} \cdot |\overline{Q}_m(\tau)| \cdot |\Phi_k^{(m)}| \cdot$$

$$\cos(\omega_m(t-\tau) - \theta_{rm} +$$

$$\theta_{mk} + \theta_{fm}) \cdot d\tau \quad (k = n, n+1, \cdots, 2n) \quad (1-134)$$

写成列矢量的形式，则为

$$\{x\} = \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{|R_m|} \cdot \int_0^t e^{-\eta_m(t-\tau)} \cdot |\overline{Q}_m(\tau)| \cdot \{|\Phi_k^{(m)}| \cdot$$

$$\cos(\omega_m(t-\tau) - \theta_{rm} + \theta_{mk} + \theta_{fm})\}\,d\tau \quad (1-135)$$

这就是 n 自由度一般黏滞阻尼系统在任意激励下对应于零初条件的运动响应的解析表达式。

参考文献

[1] 师汉民，谌刚，吴雅. 机械振动系统——分析·测试·建模·对策. 武汉：华中理工大学出版社，1992.

[2] Harris C M and Crede C E. Shock and Vibration Handbook. New York：McGraw－Hill，1976.

第2章　连续线性振动系统

第1章中研究的离散线性振动系统具有两个鲜明的特征:其一是描述系统在任一时刻的位形只需有限个自由度;其二是描述系统的状态用的是二阶常微分方程组,而在数学上对此类常微分方程组的处理可以很容易地转化为对一组线性代数方程组的处理,因此研究此类系统所需的数学工具自然而然地就是矩阵代数[1]。

工程实际中的许多结构均是可变形的弹性体,当这些弹性体的弹性恢复力和变形服从胡克定律时,通常将其当作线性连续媒质来处理,这里的连续指的是系统的质量、刚度、阻尼等在空间上的连续不间断的分布,因此是宏观意义上的,如果在物质的分子、原子等微观尺度上来考虑问题,则任何媒质均是不连续的。

任何物体均可以看作是由无限多个无穷小的微元体所组成的,为描述物体未变形时这些微元体在空间中的确切位置,一般需事先在空间中建立一个参考坐标系,参考坐标系的维数视情况而定,可能是一维的,也可能是二维的或三维的。每个微元体在空间中的位置,就由该微元体所占空间位置在参考坐标系中的坐标来确定。物体在变形过程中各微元体在 t 时刻的位置,由其位移矢量来描述。因此位移矢量是各微元体在参考坐标系中的坐标和时间 t 的函数,位移矢量在参考坐标系中各坐标轴上投影的个数就称为该微元体的自由度数。由于组成物体的微元体的个数是无限的,因此整个系统的自由度数是无限的。为了保证不引入几何非线性,一般要求物体的变形为小变形,即各微元体离开静止位置的位移为小位移。且要求各微元体的位移函数对参考坐标和时间 t 具有足够阶数的连续偏导数。

由以上分析可知,连续线性振动系统是一个具有无限多个自

由度的系统，描述该系统运动过程的是偏微分方程。

典型的连续线性振动系统有作横向振动的弦、作纵向振动的杆、作扭转振动的轴、作弯曲振动的梁和板等。本章主要讨论连续线性振动系统的运动微分方程、边界值问题、在初始条件下的自由振动响应、强迫振动响应、波在结构中的传播特性、连续线性系统的近似解法等。

2.1 二阶系统的振动

这里所讲的二阶系统是指其运动微分方程归结为二阶偏微分方程的系统，典型的有弦的横向振动、杆的纵向振动和轴的扭转振动等。本节讨论这些系统的运动微分方程、边界值问题的求解、系统的振动特性，以及自由振动响应和强迫振动响应等。

2.1.1 弦的横向振动

图 2-1(a)为作横向振动的柔性弦。用 $\rho(x)$ 表示单位长度的弦的质量即弦的线密度，用 $T(x)$ 表示弦上 x 处的张力，用 $y(x,t)$ 表示弦上 x 处的微段在 t 时刻的横向位移，$f(x,t)$ 为作用在弦上的横向分布力。

任意时刻 t，$\mathrm{d}x$ 微段的弦的受力情况如图 2-1(b)所示。由牛顿第二定律，该微段在 y 方向的运动方程为

$$T(x+\mathrm{d}x)\sin\theta(x+\mathrm{d}x,t)-T(x)\sin\theta(x,t)+f(x,t)\mathrm{d}x$$
$$=\rho(x)\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

当 $\mathrm{d}x\to 0$，并假设倾角 θ 较小，则有

$$T(x+\mathrm{d}x)\approx T(x)+\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

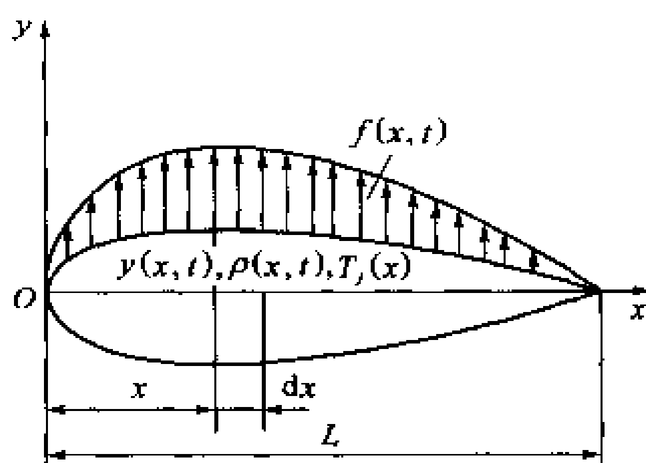
$$\sin\theta(x,t)\approx\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$\sin\theta(x+\mathrm{d}x,t)\approx\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

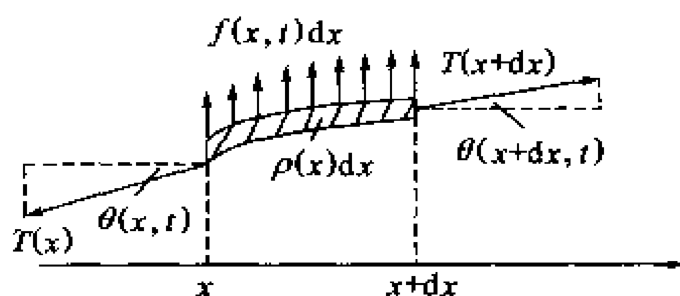
将以上三式代入运动方程中，整理，略去二阶微量，并在等式两边同除以 dx，即得弦振动时的运动微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]+f(x,t)=\rho(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$(0\leqslant x\leqslant L) \qquad (2-1)$$



(a)



(b)

图 2－1 作横向振动的弦

(a) 系统示意图；(b) dx 微段分离体。

同讨论离散线性振动系统一样，我们首先讨论式(2－1)对应的自由振动系统的特征值问题。为此令 $f(x,t)=0$，即得系统作自由振动时的运动微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]=\rho(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (0\leqslant x\leqslant L)$$

$$(2-2)$$

解偏微分方程的方法之一是分离变量法，这相当于探讨系统作同步运动的可能性，为此假设

$$y(x,t) = Y(x)\eta(t) \tag{2-3}$$

将式(2-3)代入式(2-2)，整理得

$$\frac{-1}{\rho(x)Y(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[T(x)\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{-1}{\eta(t)}\frac{\mathrm{d}^2\eta(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{2-4}$$

式(2-4)左边仅为空间变量 x 的函数，而右边则为时间变量 t 的函数，要使式(2-4)在任意 x 处和任意时刻 t 都成立，两边必须等于某常数。记该常数为 λ，得

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta(x)}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\eta(x) = 0; \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[T(x)\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda\rho(x)Y(x) \tag{2-5}$$

由于系统中无阻尼，故由式(2-5)的第一式知，系统存在同步运动的必要条件是 $\lambda > 0$，不妨记

$$\lambda = \omega^2 \tag{2-6}$$

于是由式(2-5)的第一式可解出函数 $\eta(t)$

$$\eta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{2-7}$$

式中：A、B 为由初始条件决定的任意常数。上式表明，如果存在式(2-3)表示的同步运动，则时间函数必为某谐波函数。谐波运动的频率 ω 由系统的参数决定，详见后面的讨论。

为讨论式(2-5)的第二式的解 $Y(x)$ 及其特性，假定弦是均质的，即线密度 $\rho(x)$ 为常数，不妨将其记为 ρ；同时假设弦中的张力 $T(x)$ 也为常数，将其记为 T。则式(2-5)的第二式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2Y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \beta^2 Y(x) = 0 \tag{2-8}$$

式中

$$\beta^2 = \omega^2\rho/T \tag{2-9}$$

对于图 2-1(a)所示的两端面定的弦，其边界条件为

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \qquad (2-10)$$

即
$$Y(0) = Y(L) = 0 \qquad (2-11)$$

易于检验,式(2-8)的通解为

$$Y(x) = C\sin\beta x + D\cos\beta x \qquad (2-12)$$

式中:C、D 为任意常数。

将边界条件 $Y(0)=0$ 代入上式,得 $D=0$,于是

$$Y(x) = C\sin\beta x \qquad (2-13)$$

要使上式满足 $Y(L)=0$ 的边界条件,必须有

$$C\sin\beta L = 0 \qquad (2-14)$$

但此时 C 不能为零,否则由式(2-13)知 $Y(x)\equiv 0$,再由式(2-3)得 $Y(x,t)\equiv 0$,即弦静止在平衡位置而根本没有振动。因此,我们得系统的特征方程

$$\sin\beta L = 0 \qquad (2-15)$$

由此可得

$$\beta L = r\pi \quad (r = 1,2,\cdots) \qquad (2-16)$$

即
$$\beta_r = \frac{r\pi}{L} \quad (r = 1,2,\cdots) \qquad (2-17)$$

同时考虑式(2-9)和式(2-17),得系统的固有频率为

$$\omega_r = r\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}} \quad (r = 1,2,\cdots) \qquad (2-18)$$

上式说明,系统确实存在同步运动,且同步运动的个数为无穷多个。各同步运动的振荡频率为 $\omega_r = r\pi\sqrt{T/\rho L^2}$ $(r=1,2,\cdots)$,它们由弦的张力 T、线密度 ρ 与长度 L 决定。将式(2-17)代入式(2-13),可得以频率 ω_r 作同步运动时对应的系统运动模式为

$$Y_r(x) = C_r\sin\frac{r\pi x}{L} \quad (r = 1,2,\cdots) \qquad (2-19)$$

一般称 $Y_r(x)$ 为系统的第 r 阶特征函数或振型。当 $r=L$ 时,$\omega_1 =$

$\pi\sqrt{T/\rho L^2}$,我们将其称为系统的基频。由以上的讨论可知,连续线性振动系统具有无穷多个自振频率及其对应的特征函数。

如果记

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{2-20}$$

则式(2-2)可改写为

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{2-21}$$

式(2-21)就是典型的波动方程,其中 c 为波在弦上传播的速度,即波速。式(2-21)存在如下的形式解

$$y(x,t) = F_1(x-ct) + F_2(x+ct) \tag{2-22}$$

式中:F_1、F_2 是任意的连续函数;$F_1(x-ct)$ 表示以波速 c 向 x 轴正向匀速传播的波;$F_2(x+ct)$ 表示以波速 c 向 x 轴负向匀速传播的波。

在离散线性振动系统中,系统的模态矢量 $\{u^{(r)}\}$ $(r=1,2,\cdots,n)$ 对质量矩阵 $[m]$ 和刚度矩阵 $[k]$ 存在正交性,因此,可以按某种规则对模态矢量进行正规化或归一化处理。在连续线性振动系统中,其特征函数 $Y_r(x)$ $(r=1,2,\cdots,n)$ 对系统的质量分布 $\rho(x)$、弹性分布 $T(x)$ 也存在类似的正交性,也可以按某种规则对其进行正规化处理,如果以如下方式

$$\int_0^L \rho(x)Y_r^2(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad (r=1,2,\cdots) \tag{2-23}$$

对特征函数进行正规化处理,则正规化了的特征函数为

$$Y_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}}\sin\frac{r\pi x}{L} \qquad (r=1,2,\cdots) \tag{2-24}$$

容易证明特征函数对系统质量分布的正交性为[2]

$$\int_0^L \rho(x)Y_r(x)Y_s(x)\mathrm{d}x = \delta_{rs} \qquad (r,s=1,2,\cdots) \tag{2-25}$$

对系统弹性分布的正交性为[2]

$$\int_0^L T(x)\frac{\mathrm{d}Y_r(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}Y_s(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \omega_r^2\delta_{rs} \qquad (r,s = 1,2,\cdots) \tag{2-26}$$

在离散线性振动系统中，系统的通解可以表示为各同步解的叠加；在连续线性振动系统中，也存在类似的结论，即系统的一般运动可表示为各同步运动的叠加

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{r=1}^{\infty} y_r(x,t) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x)\eta_r(t) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\rho L}}\sin\frac{r\pi x}{L}(A_r\cos\omega_r t + B_r\sin\omega_r t) \end{aligned} \tag{2-27}$$

有了以上的准备后，现在我们可以讨论系统对初始条件的自由振动响应和对强迫激励的强迫振动响应了。首先讨论系统对初始条件的自由振动响应。

假设系统的初始条件为

$$\left.\begin{aligned} y(x,0) &= y_0(x) \\ \dot{y}(x,0) &= \dot{y}_0(x) \end{aligned}\right\} \tag{2-28}$$

在式(2-27)中令 $t=0$，并考虑到式(2-28)的第一式得

$$\sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x)\eta_r(0) = y_0(x)$$

上式两边同乘以 $\rho Y_s(x)$，并在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上积分，考虑到正交性条件式(2-25)，得

$$\eta_s(0) = \int_0^L \rho y_0(x) Y_s(x)\mathrm{d}x$$

因 $\eta_s(0) = A_s$，所以

$$A_s = \int_0^L \rho y_0(x) Y_s(x) \mathrm{d}x \qquad (s = 1,2,\cdots) \qquad (2-29)$$

由式(2－27)知

$$\dot{y}(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \dot{\eta}_r(t)$$

联立上式和式(2－28)的第二式，得

$$\dot{y}_0(x) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \dot{\eta}_r(0)$$

因 $\dot{\eta}_r(0) = B_r \omega_r$，所以

$$\dot{y}_0(x) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) B_r \omega_r$$

在上式两边同乘以 $\rho Y_s(x)$，并在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上积分，考虑到正交性条件式(2－25)，得

$$B_s = \frac{1}{\omega_s} \int_0^L \rho \dot{y}_0(x) Y_s(x) \mathrm{d}x \qquad (s = 1,2,\cdots) \qquad (2-30)$$

于是系统在式(2－28)所给出的初始条件下的自由振动响应为

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\rho}{L}} \sin \frac{r\pi x}{L} \left[\cos\omega_r t \cdot \int_0^L y_0(x) Y_r(x) \mathrm{d}x + \frac{\sin\omega_r t}{\omega_r} \int_0^L \dot{y}_0(x) Y_r(x) \mathrm{d}x \right] \qquad (2-31)$$

当弦上作用有横向的分布载荷 $f(x,t)$ $(0 \leqslant x \leqslant L)$ 时，系统作强迫振动，此时系统的运动微分方程为

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{T} f(x,t) \quad (0 \leqslant x \leqslant L) \qquad (2-32)$$

将式(2－27)代入式(2－32)，得

$$\frac{1}{c^2} \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x) \ddot{\eta}_r(t) - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2 Y_r(x)}{\mathrm{d}x^2} \eta_r(t) = \frac{1}{T} f(x,t)$$

$$0 \leqslant x \leqslant L \qquad (2-33)$$

在上式两边同时乘以 $\rho Y_s(x)$，并在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上积分，则对式(2－33)左端的第一项，考虑到正交性条件式(2－25)，得

$$\frac{1}{c^2}\int_0^L \rho Y_s(x)\sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x)\ddot{\eta}_r(t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c^2}\ddot{\eta}_s(t)$$

对式(2－33)左端的第二项，考虑到正交性条件式(2－26)和边界条件，有

$$-\int_0^L \rho Y_s(x)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2 Y_r(x)}{\mathrm{d}x^2}\eta_r(t)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r(t)\int_0^L \rho Y_s(x)\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}Y_r(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$= -\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r(t)\rho Y_s(x)\frac{\mathrm{d}Y_r(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}^{L} +$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r(t)\frac{\rho}{T}\int_0^L T\frac{\mathrm{d}Y_r(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}Y_s(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{c^2}\omega_s^2\eta_s(t)$$

于是式(2－33)变为

$$\ddot{\eta}_s(t) + \omega_s^2\eta_s(t) = \int_0^L Y_s(x)f(x,t)\,\mathrm{d}x \qquad (s = 1,2,\cdots) \tag{2-34}$$

由第1章中的讨论知，形如上式的解为

$$\eta_s(t) = \frac{u(t)}{\omega_s}\int_0^t \sin\omega_s(t-\tau)\cdot\int_0^L Y_s(x)f(x,\tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \qquad (s = 1,2,\cdots) \tag{2-35}$$

式中：$u(t)$是单位阶跃函数。

于是系统的强迫振动响应为

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x)\eta_r(t) \tag{2-36}$$

式中：$Y_r(x)$、$\eta_r(t)$的表达式分别参见式(2-24)和式(2-35)。

2.1.2 杆的纵向振动

图2-2(a)所示为长度为L,两端固定并作纵向振动的杆,用E表示组成杆的材料的弹性模量,$A(x)$表示杆的横截面面积,$m(x)$表示杆的线密度。用$u(x,t)$表示x处在时刻t的轴向位移。假设在杆的中轴线上作用有轴向的分布载荷$f(x,t)$。则根据图2-2(b)所示的dx微段的受力分析图,并考虑到杆中的应力应变关系,可推导出系统的运动微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+f(x,t)=m(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$(0\leqslant x\leqslant L)\qquad(2-37)$$

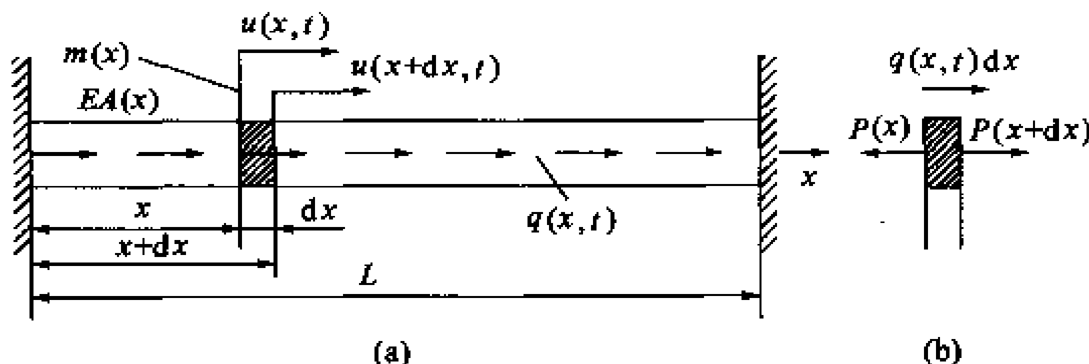


图2-2 作纵向振动的杆

边界条件为

$$u(0,t)=u(L,t)=0\qquad(2-38)$$

系统作自由振动时$f(x,t)=0$,于是运动微分方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=m(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$(0\leqslant x\leqslant L)\qquad(2-39)$$

采用2.1.1节中同样的方法和步骤,为寻求系统的同步解,令

$$u(x,t)=U(x)\eta(t)\qquad(2-40)$$

将式(2－40)代入系统作自由振动时的运动微分方程，得

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[EA(x)\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\right]=\omega^2 m(x)U(x)\\&\frac{\mathrm{d}^2\eta(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\eta(t)=0\end{aligned}\right\}\quad(0\leqslant x\leqslant L)\tag{2-41}$$

为了处理问题方便起见，设系统为均匀杆，即设杆的线密度 $m(x)$ 为常数，记为 m，设杆的横截面积 $A(x)$ 为常数，记为 A。则 $U(x)$ 应满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2}+\beta^2U(x)=0\qquad(0\leqslant x\leqslant L)\tag{2-42}$$

式中

$$\beta^2=\omega^2\frac{m}{EA}\tag{2-43}$$

由以上的分析可知，杆的纵向振动的运动微分方程与弦的横向振动的运动微分方程均是二阶偏微分方程，因此，本节并不讨论系统在初始条件下的自由振动响应和强迫激励下的强迫振动响应，这些均可参照上节的方法和步骤进行。

仔细考虑，弦与杆在边界支承方式上有很大的差异，要使弦具有一定的张力，使其作横向振动，在两端必须将其固定；但是要使杆作纵向振动，既可如图2－2(a)所示将两端固定，也可如图2－3(a)所示使其一端自由、一端固定，或如图2－3(b)所示将其一端固定、另一端通过一根刚度系数为 k 的弹簧再固定，或如图2－3(c)所示将其一端固定、另一端固接一有限集中质量 M。本节我们通过讨论在不同边界支承条件下杆的特征频率和对应的特征函数，说明对于连续系统来说制约系统自振频率和特征函数的不仅是系统的质量分布和刚度分布特性，还有系统的边界支承条件。因此，解偏微分方程的问题也称作边界值问题。

对图2－2(a)所示的两端固定的均匀杆，其边界条件为式

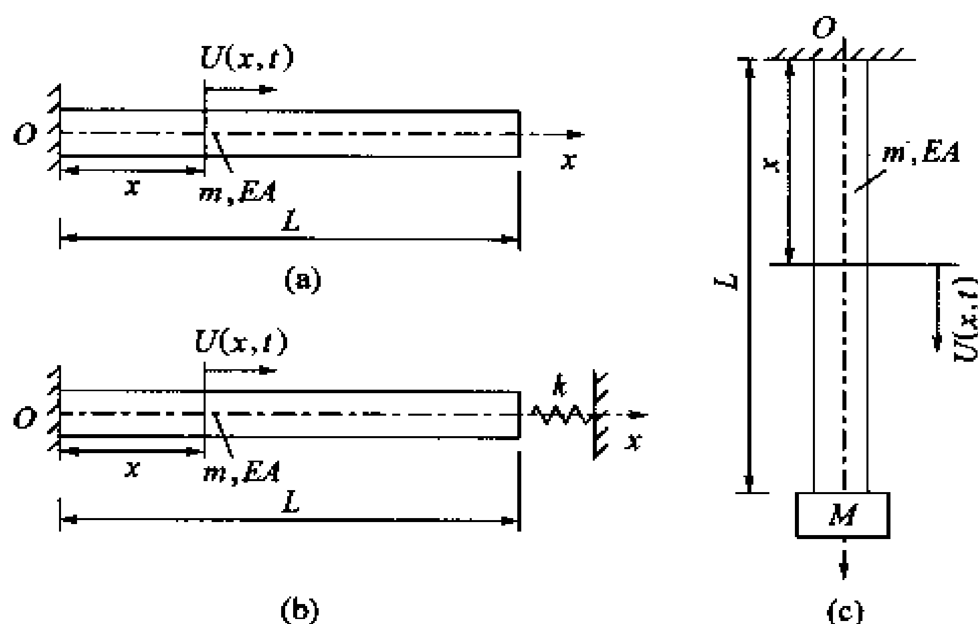


图 2-3　不同边界支承情况的杆

(2-38)相当于

$$U(0) = U(L) = 0 \tag{2-44}$$

式(2-42)的通解为

$$U(x) = C\sin\beta x + D\cos\beta x \tag{2-45}$$

将 $U(0)=0$ 代入式(2-45)，得

$$D = 0$$

再将 $U(L)=0$ 代入式(2-45)，得

$$U(L) = 0 = C\cdot\sin\beta L$$

为使系统具有 $U(x)$ 不恒等于零的非平凡解，必须有

$$\sin\beta L = 0$$

于是，得

$$\beta L = r\pi \qquad (r = 1,2,\cdots) \tag{2-46}$$

联立式(2-43)和式(2-46)，得系统的特征频率为

$$\omega_r = r\pi\sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \qquad (r = 1,2,\cdots) \tag{2-47}$$

将其代入到式(2－45)，得对应的系统特征函数为

$$U_r(x) = C_r \sin\frac{r\pi}{L}x \qquad (r = 1,2,\cdots) \qquad (2-48)$$

将系统的特征频率表达式、特征函数表达式与作横向振动的弦的特征频率、特征函数比较知，两者在形式上是完全一致的。

对图 2－3(a)所示的一端固定、一端自由的均匀杆，系统的边界条件为

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(0,t) = 0; \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \qquad (2-49)$$

上式相当于

$$\left.\begin{aligned} &U(0) = 0 \\ &\left.\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-50)$$

将 $U(0)=0$ 代入式(2－45)，得 $D=0$，于是

$$U(x) = C\sin\beta x$$

即

$$\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = C\beta\cos\beta x$$

将式(2－50)的第二式代入上式得

$$C\beta\cos\beta L = 0$$

为了使系统具有 $U(x)$不恒等于零的非平凡解，必须有

$$\cos\beta L = 0$$

即

$$\beta L = (2r-1)\frac{\pi}{2} \qquad (r = 1,2,\cdots) \qquad (2-51)$$

于是得系统的特征频率和对应的特征函数为

$$\omega_r = \frac{(2r-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{EA}{m}} \qquad (r=1,2,\cdots) \qquad (2-52)$$

$$U_r(x) = C_r \sin\frac{(2r-1)\pi}{2L}x \qquad (r=1,2,\cdots) \qquad (2-53)$$

对图 2－3(b)所示的一端固定、一端与刚度系数为 k 的弹簧相连的均匀杆，系统的边界条件为

$$u(x,t)\mid_{x=0} = u(0,t) = 0;$$

$$EA\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L} = -ku(x,t)\mid_{x=L} \qquad (2-54)$$

这相当于

$$U(0) = 0; \quad \frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=L} = -\frac{k}{EA}U(x)\mid_{x=L} \quad (2-55)$$

将 $U(0)=0$ 代入式(2－45)，得 $D=0$，于是

$$U(x) = C\sin\beta x$$

将式(2－55)中的第二式代入上式，为使系统具有非平凡解，必须有

$$-\frac{EA}{kL} = \frac{\tan\beta L}{\beta L} \qquad (2-56)$$

式(2－56)是以 βL 为自变量的超越方程，可用图解法求解，总之由上式可求出一系列的 β 值，考虑到式(2－43)，由这些 β 值，我们可以求出系统的特征频率：$\omega_r\ (r=1,2,\cdots)$，同理，由 $U(x)=C\sin\beta x$ 可以求出对应的特征函数 $U_r(x)\ (r=1,2,\cdots)$。容易验证当 $k\to\infty$ 时，其解与图 2－3(a)所示的系统一样。

对图 2－3(c)所示的一端固定、一端与集中质量 M 相连的均匀杆，系统的边界条件为

$$u(x,t)\mid_{x=0} = u(0,t) = 0; \quad EA\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L}$$

$$= -M\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\bigg|_{x=L} \qquad (2-57)$$

这相当于

$$U(0)=0;\quad \left.\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}=\frac{M}{EA}\omega^2U(x)\mid_{x=L}\tag{2-58}$$

同理，将 $U(0)=0$ 代入式(2-45)，得 $D=0$，于是

$$U(x)=C\sin\beta x$$

将其代入式(2-58)的第二式，且考虑到系统应有 $U(x)$ 不恒等于零的非平凡解，得系统的特征方程为

$$\frac{Lm}{M}=\beta L\tan\beta L\tag{2-59}$$

上式也是以 βL 为自变量的超越方程，用图解法，可求出一系列满足上式的 β 值，将这些 β 值代入式(2-43)，可求出系统的一系列特征频率：$\omega_r(r=1,2,\cdots)$，同理，由 $U(x)=C\sin\beta x$ 可求出对应的特征函数 $U_r(x)(r=1,2,\cdots)$。作为极限情形，容易验证当 $M\to\infty$ 时，系统的特征频率和特征函数同相应的两端固定均匀杆系统的特征频率和特征函数。而当 $M\to 0$ 时，相当于一端固定、一端自由的均匀杆系统。

通过对以上不同边界条件的讨论可知，二阶连续系统的固有特性(即系统的固有频率与对应的振型)与系统的边界条件关系密切，这是与离散系统有显著差别的一个特性。

系统对初始条件的自由振动响应及在任意激励作用下的强迫振动响应的求法见 2.1.1 节中的讨论，由于系统的控制方程同型，因此其求解方法完全一致。

2.1.3 轴的扭转振动

图 2-4(a) 为长度为 L 的圆截面轴作扭转振动的系统示意图，设其单位长度的转动惯量为 $I(x)$，材料的剪切模量为 G，截面极惯性矩为 $J(x)$，分布扭矩为 $q(x,t)$，t 时刻 x 处相对于 $x=0$ 处的扭角为 $\theta(x,t)$，则根据图 2-4(b) 的 $\mathrm{d}x$ 微段分离体图，可得系统作扭转振动时的运动微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right]+q(x,t)=I(x)\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$(0\leqslant x\leqslant L)\qquad(2-60)$$

系统作自由振动时 $q(x,t)=0$,于是系统自由振动时的运动微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right]=I(x)\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}\qquad(0\leqslant x\leqslant L)$$

$$(2-61)$$

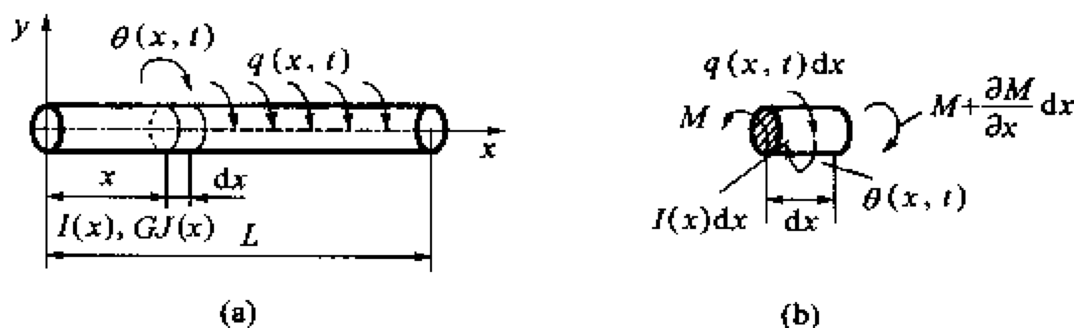


图 2-4 作扭转振动的轴

用分离变量法,令

$$\theta(x,t)=\Theta(x)\eta(t)\qquad(2-62)$$

将其代入式(2-61),得系统特征函数应满足的方程为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[GJ(x)\frac{\mathrm{d}\Theta(x)}{\mathrm{d}x}\right]=\omega^2I(x)\Theta(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant L)$$

$$(2-63)$$

如果是均匀轴,那么

$$J(x)=J=\text{常数};\quad I(x)=I=\text{常数}$$

则式(2-63)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta(x)}{\mathrm{d}x^2}+\beta^2\Theta(x)=0\qquad(0\leqslant x\leqslant L)\qquad(2-64)$$

式中

$$\beta^2=\frac{\omega^2I}{GJ}\qquad(2-65)$$

显然，已知系统两端的边界条件后，由式(2－64)的解应满足的边界条件，可确定系统的特征频率及对应的特征函数，其讨论同2.1.1节或2.1.2节。

由于系统的运动微分方程与弦作横向振动和杆作纵向振动时的运动微分方程同型，因此系统对初始条件的自由振动响应和对激励 $q(x,t)$ 的强迫振动响应的求法同2.1.1节中对弦系统的讨论。

值得特别指出的是，正如在2.1.1节所讨论的，二阶系统的波动的传播速度只与系统本身的弹性参数和质量参数有关，与系统的边界条件无关，与系统的振动频率无关。

2.2 四阶系统的振动

这里所讲的四阶系统是指其运动微分方程归结为四阶偏微分方程的系统，典型的有作弯曲振动的梁和板。本节讨论这些系统的运动微分方程、边界值问题的求解、系统的振动特性及系统对初始条件的自由振动响应和对激励的强迫振动响应的求解方法。

2.2.1 梁的弯曲振动

1. 运动微分方程

作横向振动的梁如图2－5(a)所示，假设梁的长度 L 与其横截面的高度 h 之比大于10，此时梁中任一单元的转动动能远小于其横向移动动能，梁的剪切变形能远小于弯曲变形能，于是简单梁的理论成立。梁作弯曲振动时，其中心线在任意时刻的位形记为 $y(x,t)$，称为梁的挠曲线，它代表同一横截面上各点的横向位移。假设梁的长度为 L，单位长度的梁的质量记为 $m(x)$，梁横截面的抗弯刚度记为 $EI(x)$，其中 E 是组成梁的材料的弹性模量，$I(x)$ 是梁截面绕过梁的几何中心的 z 轴的转动惯量，记梁上的分布载荷为 $f(x,t)$。则由图2－5(b)所示的 dx 微段的分离体图可得

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \qquad (2-66)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} = Q(x,t) \qquad (2-67)$$

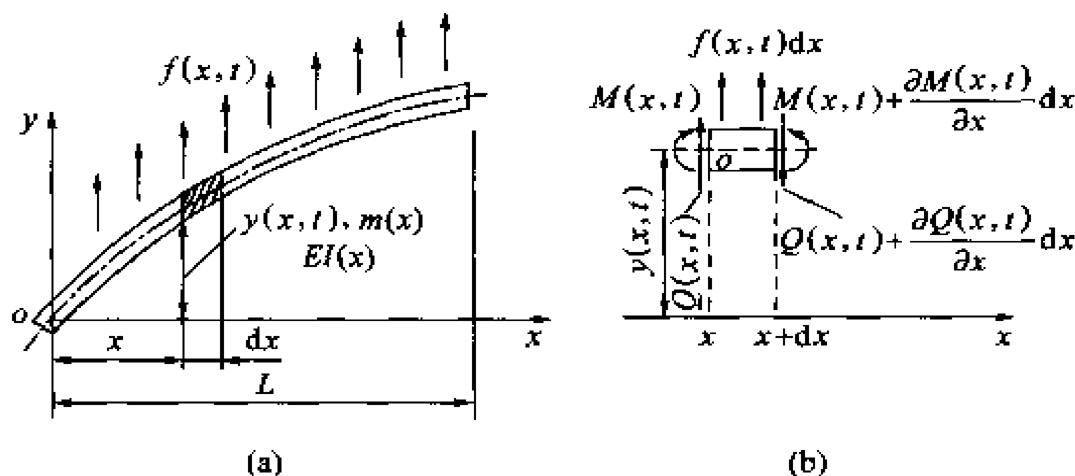


图 2-5 作弯曲振动的梁

由材料力学的知识知，梁截面上的弯矩 $M(x,t)$、抗弯刚度 $EI(x)$ 与梁的弯曲变形 $y(x,t)$ 之间具有如下关系

$$EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = M(x,t) \qquad (2-68)$$

综合以上三式，消去剪力 $Q(x,t)$ 和弯矩 $M(x,t)$，得梁作弯曲振动时的运动微分方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] + m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant L) \qquad (2-69)$$

式(2-69)与2.1节中所讨论的弦的横向振动、杆的纵向振动及轴的扭转振动等系统具有截然不同的振动特性。

2. 边界条件

典型的梁的边界条件有如下几种。

(1) 固支端

如图 2-6(a)左端所示，显然在 $x=0$ 处，系统的位移和梁截

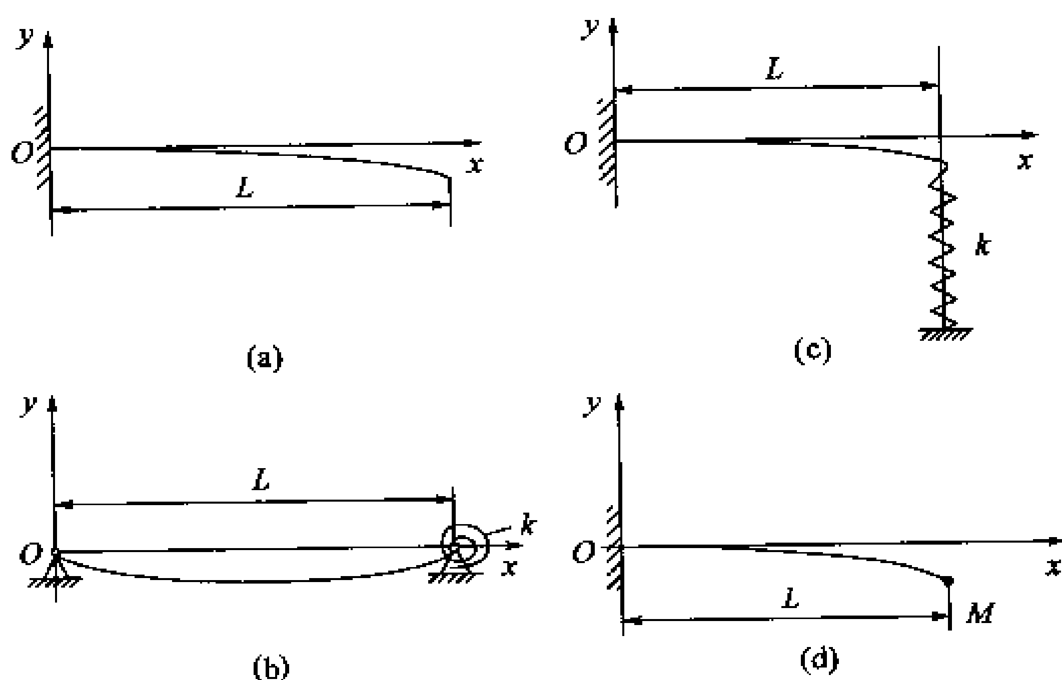


图 2-6　典型的边界条件

面的转角均为零

$$y(0,t)=0 \tag{2-70}$$

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \tag{2-71}$$

(2) 铰支端

如图 2-6(b) 左端所示，显然在 $x=0$ 处，系统的位移与横截面上的弯矩为零，即

$$y(0,t)=0 \tag{2-72}$$

$$EI(x)\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0 \tag{2-73}$$

(3) 自由端

如图 2-6(a) 右端所示，在 $x=L$ 处，横截面上的弯矩和剪力为零，即

$$EI(x)\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0 \tag{2-74}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]\bigg|_{x=L}=0 \qquad (2-75)$$

(4) 自由端带横向弹簧

如图 2-6(c)右端所示,在 $x=L$ 处,横向位移与横截面上剪力之间存在如下关系

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]\bigg|_{x=L}=ky(L,t) \qquad (2-76)$$

式中:k 是弹簧的刚度系数。在 $x=L$ 处,横截面上的弯矩为零,即

$$EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=L}=0 \qquad (2-77)$$

(5) 铰支端带卷簧

如图 2-6(b)右端所示,在 $x=L$ 处,截面转角与截面上弯矩之间的关系为

$$EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=L}=-k\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \qquad (2-78)$$

式中:k 是卷簧的刚度系数。在 $x=L$ 处横向位移为零,即

$$y(L,t)=0 \qquad (2-79)$$

(6) 自由端带集中质量

如图 2-6(d)右端所示,在 $x=L$ 处,截面上剪力与横向加速度之间存在下述关系

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]\bigg|_{x=L}=M\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\bigg|_{x=L} \qquad (2-80)$$

式中:M 是端部集中质量块的质量。在 $x=L$ 处截面上的弯矩为零,即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]\bigg|_{x=L}=0 \qquad (2-81)$$

3. 边界值问题——自由振动与模态

系统作自由振动时,外载荷为零,即 $f(x,t)=0$,此时系统的运

动微分方程由式(2-69)变为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]+m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0 \quad (0\leqslant x\leqslant L) \tag{2-82}$$

仍然用分离变量法,即求系统的同步运动,设

$$y(x,t)=Y(x)\eta(t) \tag{2-83}$$

将上式代入式(2-82)得

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2 Y(x)}{dx^2}\right]=\omega^2 m(x)Y(x) \quad (0\leqslant x\leqslant L) \tag{2-84}$$

$$\frac{d^2\eta(t)}{dt^2}+\omega^2\eta(t)=0 \tag{2-85}$$

显然式(2-85)的解为谐波解。

为简单起见,不妨设系统为均匀梁,即假定

$$I(x)=I=\text{常数}$$

$$m(x)=m=\text{常数}$$

于是特征函数 $Y(x)$满足的式(2-84)变为

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4}-\beta^4 Y(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant L) \tag{2-86}$$

式中

$$\beta^4=\frac{\omega^2 m}{EI} \tag{2-87}$$

式(2-86)的通解为

$$Y(x)=C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x+C_3\sinh\beta x+C_4\cosh\beta x \tag{2-88}$$

为说明边界条件对自由振动模态的影响，下面讨论两种不同的边界值问题。

(1) 两端铰支梁的边界值问题

考察如图 2-7 所示的两端铰支梁。由式(2-72)、式(2-73)，易知其边界条件为

$$Y(0)=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2Y(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=0 \tag{2-89}$$

$$Y(L)=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2Y(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=L}=0 \tag{2-90}$$

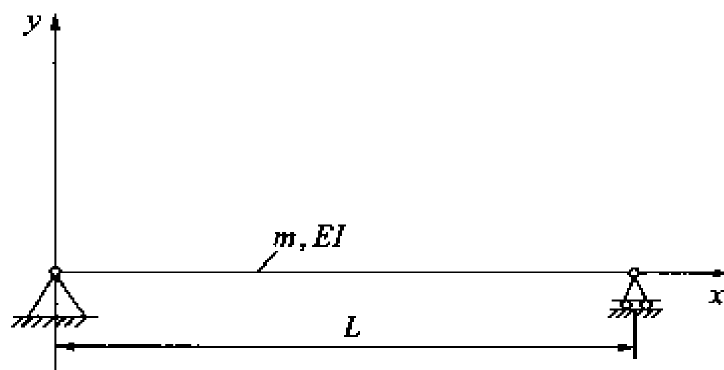


图 2-7 两端铰支梁

将特征函数的通解式(2-88)代入上述各式，得

$$C_2=C_3=C_4=0,\quad C_1\sin\beta L=0 \tag{2-91}$$

为使 $Y(x)$ 有非零解，必须

$$\sin\beta L=0 \tag{2-92}$$

即

$$\beta L=r\pi\qquad(r=1,2,\cdots) \tag{2-93}$$

由式(2-87)代入上式，得系统的面有频率为

$$\omega_r=(r\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}\qquad(r=1,2,\cdots) \tag{2-94}$$

系统对应的特征函数，即自由振动模态为

$$Y_r(x)=C_1\sin\frac{r\pi x}{L}\qquad(r=1,2,\cdots) \tag{2-95}$$

按 $\int_0^L mY_r^2(x)\mathrm{d}x = 1$ 对特征函数作正规化处理，可得 $C_1 = \sqrt{2/mL}$，于是正规化后的两端铰支梁的自由振动模态为

$$Y_r(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}}\sin\frac{r\pi x}{L} \qquad (r = 1,2,\cdots) \tag{2-96}$$

(2) 悬臂梁的边界值问题

图 2-8 为悬臂梁的示意图，该梁的 $x=0$ 处固支，在 $x=L$ 处自由。由式(2-70)、式(2-71)、式(2-74)和式(2-75)等易知，该系统的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &Y(0) = 0 \\ &\left.\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-97}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\mathrm{d}^2Y(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=L} = 0 \\ &\left.\frac{\mathrm{d}^3Y(x)}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=L} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-98}$$

将式(2-88)代入式(2-97)得

$$C_1 + C_3 = 0,\ C_2 + C_4 = 0 \tag{2-99}$$

将式(2-99)代入式(2-88)，可得

$$Y(x) = (\sin\beta x - \sinh\beta x)C_1 + (\cos\beta x - \cosh\beta x)C_2 \tag{2-100}$$

将式(2-100)代入式(2-98)，得

$$\begin{cases} (\sin\beta L + \sinh\beta L)C_1 + (\cos\beta L + \cosh\beta L)C_2 = 0 \\ (\cos\beta L + \cosh\beta L)C_1 + (-\sin\beta L + \sinh\beta L)C_2 = 0 \end{cases} \tag{2-101}$$

显然，式(2-101)是以 C_1、C_2 为未知数的齐次方程，要使其有非零解，其系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix} \sin\beta L + \sinh\beta L & \cos\beta L + \cosh\beta L \\ \cos\beta L + \cosh\beta L & -\sin\beta L + \sinh\beta L \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-102)$$

将上式左端展开，得系统的特征方程为

$$\cos\beta L\cosh\beta L = -1 \qquad (2-103)$$

式(2－103)是 β 的超越方程，只能用数值解法或图解法求解。由于 $\cos\beta L$ 与 $\cosh\beta L$ 均是周期函数，因此，式(2－103)有一系列的解，不妨记为 $\beta_r L(r=1,2,\cdots)$。将求得的 $\beta_r L$ 代入式(2－87)，可得系统的固有频率为

$$\omega_r = (\beta_r L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \qquad (r = 1,2,\cdots) \qquad (2-104)$$

由式(2－104)可求得对应于 $\beta_r L$ 的 C_2 与 C_1 的比值为

$$\xi_r = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)_r = \frac{\cos\beta_r L + \cosh\beta_r L}{\sin\beta_r L - \sinh\beta_r L} \qquad (r = 1,2,\cdots)$$

$$(2-105)$$

于是系统的特征函数为

$$Y_r(x) = C_1[(\sin\beta_r x - \sinh\beta_r x) + \xi_r(\cos\beta_r x - \cosh\beta_r x)]$$

$$(r = 1,2,\cdots) \qquad (2-106)$$

式中：C_1 是待定系数。前三阶振型及相应的自然频率如图 2－8(b)～(d)所示。

由以上的讨论可知，同一根梁，其边界条件不同，各阶固有频率和对应的特征函数就不同。在两端铰支时，由式(2－94)知，较高阶固有频率是较低阶固有频率的整数倍，所有的特征函数均是简谐的(见式(2－96))。但一端固支一端铰支时，较高阶固有频率不再是较低阶固有频率的整数倍，且特征函数也不是简谐的。

需要特别注意的是，尽管在上列各式中，我们没有对阶次 r 作出任何限制。但实际上，上面的结论只在 r 较小时成立，其理由是

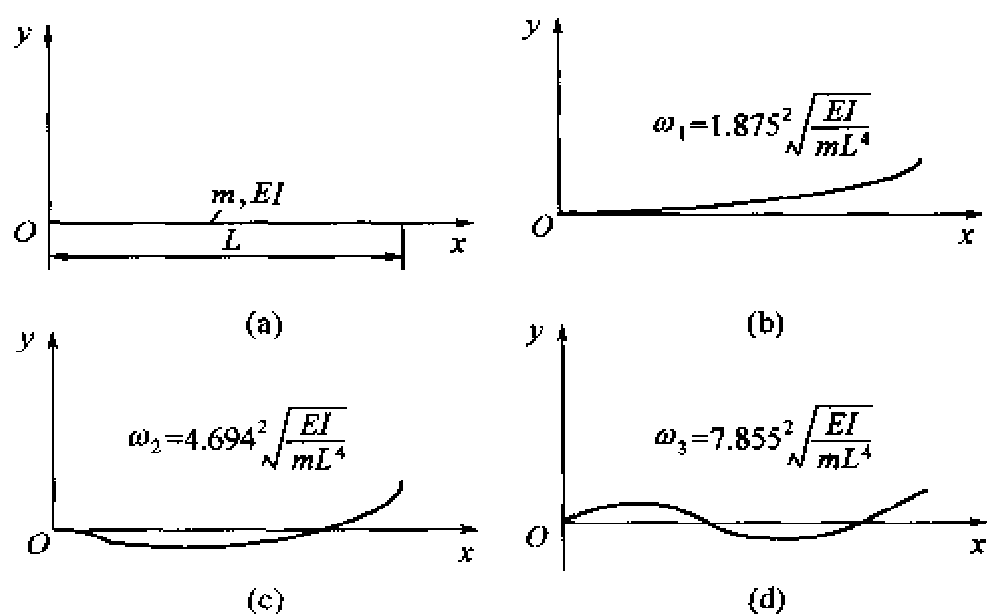


图 2－8　悬臂梁及其自然模态

当 r 较大时，系统的振动频率很高，此时梁上各单元的转动变形能与剪切变形能相对于平移动能已不能忽略，即简单梁的假设不再成立。

4. 模态的正交性

简单梁作弯曲振动时，其特征函数之间的正交性表述与二阶系统稍有差别，即对正规化了的特征函数有

$$\int_0^L m(x)Y_r(x)Y_s(x)\mathrm{d}x = \delta_{rs} \qquad (r,s = 1,2,\cdots;r\neq s) \tag{2-107}$$

$$\int_0^L EI(x)\frac{\mathrm{d}^2Y_r(x)}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2Y_s(x)}{\mathrm{d}x^2} = \omega_r^2\delta_{rs} \qquad (r,s = 1,2,\cdots;r\neq s) \tag{2-108}$$

5. 作弯曲振动的梁对初始条件的自由振动响应

由前面的讨论知，由于梁的特征函数之间的正交性，梁作弯曲振动时的横向位移 $y(x,t)$ 可表示成各特征函数的线性组合，即

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}Y_r(x)\eta_r(t) \tag{2-109}$$

不妨设 $Y_r(x)(r=1,2,\cdots)$ 已进行过正规化处理。式(2-109)中 $\eta_r(t)$ 为广义坐标，由式(2-85)知，$\eta_r(t)$ 的一般解为

$$\eta_r(t) = A_r\cos\omega_r t + B_r\sin\omega_r t \tag{2-110}$$

记系统的初始条件为

$$y(x,0) = f(x); \quad \dot{y}(x,0) = g(x) \tag{2-111}$$

由式(2-109)知

$$y(x,0) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r A_r = f(x); \quad \dot{y}(x,0) = \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r B_r Y_r(x) = g(x) \tag{2-112}$$

在上式两边各项同时乘以 $m(x)Y_s(x)$，并在 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上积分，考虑到特征函数对质量分布函数 $m(x)$ 的正交性的关系式(2-107)，可得

$$A_s = \int_0^L m(x)Y_s(x)f(x)\mathrm{d}x; \quad B_s = \frac{1}{\omega_s}\int_0^L m(x)Y_s(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{2-113}$$

于是系统对式(2-111)所给出的初始条件的自由振动响应为

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x)\left[\cos\omega_r t\int_0^L m(x)Y_r(x)f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\omega_r}\sin\omega_r t\int_0^L m(x)Y_r(x)g(x)\mathrm{d}x\right] \tag{2-114}$$

其中固有频率 $\omega_r(x)(r=1,2,\cdots)$ 及对应的特函数 $Y_r(x)(r=1,2,\cdots)$ 由对系统作特征分析时得出。

6. 作弯曲振动的梁对任意激励的强迫振动响应

为了用 2.1 节中所讲的振型叠加法来研究作弯曲振动的梁对任意激励的强迫振动响应，首先我们用拉格朗日方程来推导一些必要的关系式。

(1) 梁作弯曲振动时的动能

梁作弯曲振动时，其动能为

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L m(x)\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right]^2 \mathrm{d}x \qquad (2-115)$$

将式(2－109)代入上式,并考虑到表示特征函数对质量分布密度 $m(x)$ 的正交性的关系式(2－107),则动能可表示为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} \dot{\eta}_r^2(t) \qquad (2-116)$$

(2) 梁作弯曲振动时的势能

如前所述,我们假定振动的频率不是很高,梁的长度与其截面高度之比大于10,因此,其各截面的剪切势能较弯曲势能可忽略不计,梁的势能就是它的弯曲势能。

梁中各截面的弯矩为 $M(x) = EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$,梁中 $\mathrm{d}x$ 微段的微转角 $\mathrm{d}\theta = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x$。因此,梁的弯曲势能为

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L M\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 \mathrm{d}x \qquad (2-117)$$

将式(2－109)代入上式,并考虑到表示特征函数的二次导数对系统刚度分布 $EI(x)$ 的正交性的关系式(2－108),则势能可表示为

$$V = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} \omega_r^2 \eta_r^2(t) \qquad (2-118)$$

(3) 广义力

由式(2－109)知,梁的线性虚位移为

$$\delta y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x)\delta\eta_r(t)$$

梁中各截面的转角虚位移为

$$\delta\theta(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}Y_r(x)}{\mathrm{d}x}\delta\eta_r(t)$$

梁作弯曲振动时的外部激励力,不外乎作用在梁上的横向分

布载荷$f(x,t)$，作用在$x=x_j$处的横向集中力$F_j(t)$ $(j=1,2,\cdots,n)$，及作用在$x=x_k$处的横向集中弯矩$M_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,m)$，这些力与力矩在虚位移上所作虚功的表达式为

$$\delta W=\int_0^L\left\{\left[f(x,t)+\sum_{j=1}^{n}F_j(t)\delta(x-x_j)\right]\sum_{r=1}^{\infty}Y_r(x)\delta\eta_r(t)+\sum_{k=1}^{m}M_k(t)\delta(x-x_k)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}Y_r(x)}{\mathrm{d}x}\delta\eta_r(t)\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\left[\int_0^L f(x,t)Y_r(x)\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n}F_j(t)Y_r(x_j)+\sum_{k=1}^{m}M_k(t)\frac{\mathrm{d}Y_r(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_k}\right]\delta\eta_r(t) \tag{2-119}$$

另一方面，按广义坐标$\eta_r(t)$及广义力$Q_r(t)$，又可将虚功表示为

$$\delta W=\sum_{r=1}^{\infty}Q_r(t)\delta\eta_r(t) \tag{2-120}$$

于是得广义力的表达式为

$$Q_r(t)=\int_0^L f(x,t)Y_r(x)\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n}F_j(t)Y_r(x_j)+\sum_{k=1}^{m}M_k(t)\frac{\mathrm{d}Y_r(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_k}\quad(r=1,2,\cdots) \tag{2-121}$$

（4）各振型的运动方程及其求解

将上述T、V、Q_r的表达式代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial\eta_r}+\frac{\partial V}{\partial\eta_r}=Q_r(t)\qquad(r=1,2,\cdots) \tag{2-122}$$

可得各振型对应的运动方程为

$$\ddot{\eta}_r(t)+\omega_r^2\eta(t)=Q_r(t)\qquad(r=1,2,\cdots) \tag{2-123}$$

由对单自由度系统的讨论，容易求出上式的解，将其代入式

(2－109)就可求出系统对任意激励的强迫振动响应。若将系统对初始条件的解，即式(2－114)考虑进去，则可得出系统在任意激励下的通解。

要特别指出的是，以上所讨论的简单梁是所谓的欧拉－伯努利(Euler－Bernoulli)梁，它忽略了梁中的旋转惯量和剪切变形的效应。若要考虑这些效应的影响，需用铁摩辛柯(Timoshenko)梁理论[3]。

2.2.2 矩形板的弯曲振动

一块很薄的板可以当作两维系统考虑。当其作垂直于板平面的横向弯曲振动时，与上节所讨论的梁类似，不同的是，梁的弯曲变形只是一维连续坐标 x 和时间 t 的函数，即 $y(x,t)$。面对板的情形，若用中性平面内的直角坐标(x,y)定义板上各点的位置，用沿垂直于板面的 z 轴的位移量 u_z 表示各点的横向弯曲变形，则 u_z 是二维坐标(x,y)和时间 t 的函数，即 $u_z(x,y,t)$。与上节讨论梁作弯曲振动时的情形类似，对应地对作横向弯曲振动的板也可分为两种情形讨论：第一种是与欧拉－伯努利梁相对应，忽略剪切变形的影响，假定变形前垂直于板的中性平面的直线在变形过程中仍然垂直于该平面，这种板称为 Kirchoff 板；第二种是与铁摩辛柯梁对应，考虑剪切变形的影响，这种板称为 Mindlin 板。

本节我们只讨论简单的 Kirchoff 板，且假定横向位移 u_z 小到足以对问题进行线性化处理，即使如此，板的横向振动问题仍然比梁的横向弯曲振动问题复杂得多。因此，本节我们只给出几个结论。

若记垂直于平板中性平面的分布力为 $f_z(x,y,t)$，则忽略横截面的转动惯量和剪切变形，可得板作横向弯曲振动的运动方程

$$\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4}=\frac{f_z}{D} \qquad (2-124)$$

式中：$D=Eh^3/12(1-v^2)$，称为板的弯曲刚度；h 是板的厚度，假

定其为常数；ρ 是板的单位面积的质量密度，也假定其为常数。

自由振动时，必须置上式中的 $f_z(x,y,t)=0$。此时，上式变为齐次方程。同讨论梁作弯曲振动时的特征分析类似，用分离变量法，即假定

$$u_z(x,y,t) = q(x,y)\eta(t) \tag{2-125}$$

式中：广义坐标 $\eta(t)$ 是一简谐函数；特征函数 $q(x,y)$ 由下式确定

$$\lambda^2 \frac{\rho h}{D} q(x,y) = \frac{\partial^4 q(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 q(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 q(x,y)}{\partial y^4} \tag{2-126}$$

上式就确定了作横向弯曲振动的板的特征值问题，具体的特征值及相应的特征函数由具体的边界条件确定，要特别注意的是此类特征值问题的复杂性不在于其控制方程是四阶偏微分方程，而在于平板的边界条件难于解析表达，特别是当板的几何形状不规则时。对四边均简支在 x 方向的长度为 a，在 y 方向的长度为 b 的矩形板，其特征值及相应的特征函数为

$$\begin{aligned}\lambda_{jk} &= \pi^2\left[\left(\frac{j}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \\ &= \pi^2\left[\left(\frac{j}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2\right]\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}} \qquad (j,k=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{2-127}$$

$$q_{jk}(x,y) = q_0 \pi \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \qquad (j,k=1,2,\cdots) \tag{2-128}$$

在特征函数的表达式中，常数 j 和 k 的物理意义分别表示板弯曲变形后在 x 方向和 y 方向所含半波长的个数。此时，同样证明特征函数具有通常的对刚度分布和质量分布的正交性特性。

需要注意的是当 $a=b$ 时，即为正方形板时，第 j,k 阶特征频率与第 k,j 阶特征频率重合。当出现此种重合时，对应的特征函

数的线性组合本身还是特征函数。

参考文献

[1] Harris C M and Crede C E. Shock and Vibration Handbook. NewYork:McGraw - Hill, 1976.

[2] 师汉民,谌刚,吴雅. 机械振动系统——分析·测试·建模·对策. 武汉:华中理工大学出版社,1992.

[3] Timoshenko S. Vibration Problems In Engineering. 4th edition. New York:John Wiley & Sons,1974.

第3章　随机激励下的振动

3.1　引　　言

我们已分析过三种类型的激励：谐波激励、周期激励与非周期激励。这三种类型的激励有一个共同的特点，即在任何时刻 t 的激励的数值 $f(t)$ 是完全知道的。这种激励称为确定激励。对于线性系统来说，已经有十分完善的办法，来处理其在确定激励下的响应问题。

可是还存在另外一种类型的激励，如公路路面对汽车车轮悬挂系统的激励，喷气式发动机对飞机结构的激励，以及海浪对轮船或采油平台的激励等。它们也有一个共同的特点：其变化规律是不确定的，即每次测量的结果都不相同，如图 3-1 所示[1]。这类激励称为不确定激励，或随机激励。对于这类激励，没有办法以一种确定的函数关系 $f(t)$ 来预测其在各时刻的数值。其原因在于影响激励的因素太多、太复杂，在测试中难于确切地加以控制或预测。对于在这种类型的激励下系统的响应显然不能搬用前面的分析方法，而必须另辟新的途径。这种途径的基本思想是：不再企求描述激励随时间的变化规律，退面求其次，即只要求掌握激励的某些“统计规律性”，同时也不去追求获得响应的时间历程，而是满足于对于响应的“统计规律性”的掌握与应用。这里所谓的“统计规律性”是指激励或响应的某些“平均数”，这些平均数可以排除各种不确定的偶然因素的干扰，而揭示出内在的规律性。发现线性系统受到的激励与其响应的统计规律性之间的联系，正是现代“统计动力学”的重大突破，也是分析系统在随机激励下的响应与行为的基础。

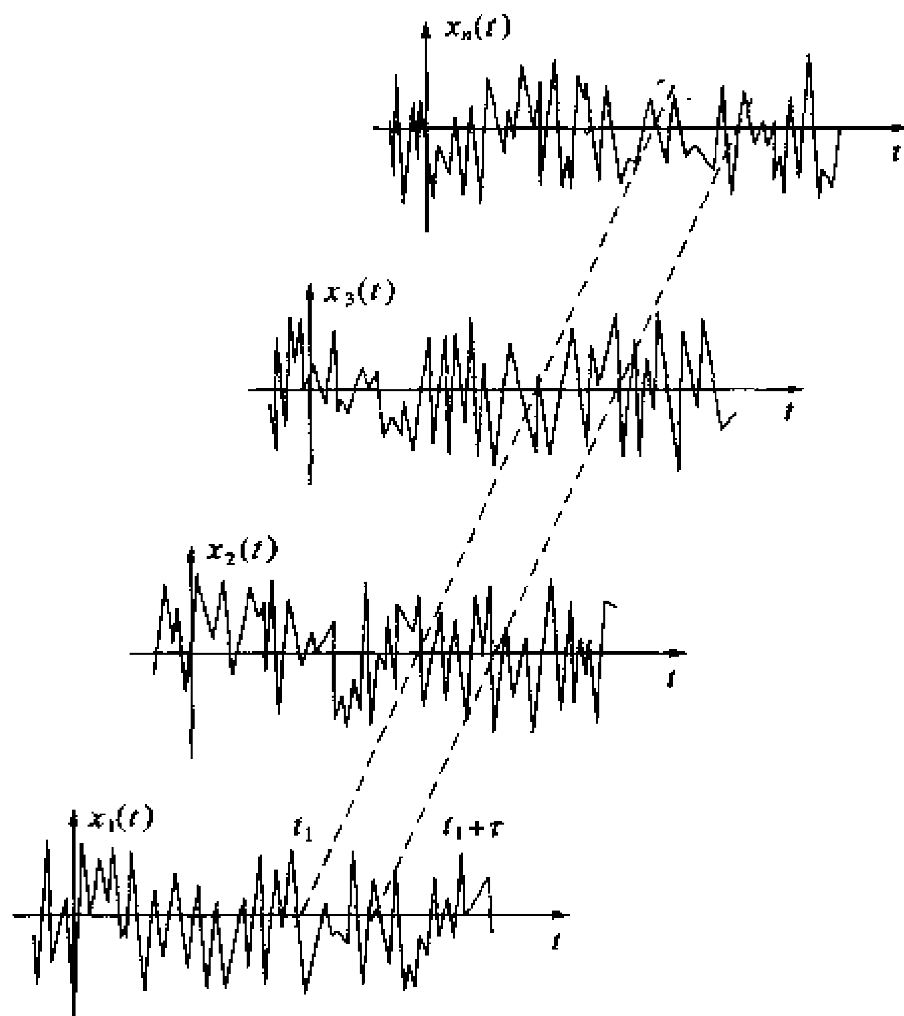


图 3－1　随机激励的时间历程

3.2　随机过程的基本概念

概率论中的一个基本概念是随机试验，它是指结果不能事先确定且在相同条件下可以重复的那种试验。注意区别这里的试验与物理、化学中的实验。有些随机试验的结果可以用一个数字来表示，如测试某种产品的寿命，测量某种零件上的某个尺寸等。如各次试验的结果记为 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$；则其总体记为 $X=\{x_k\}$，称为随机变量。另一些随机试验，如测量跑道对飞机起落架的激振力，或者起落架的振动等试验，每次测量的结果都是某一个函数，如：

第一次测量　$x_1(t), -\infty < t < +\infty$;

第二次测量　$x_2(t), -\infty < t < +\infty$;

…

第 k 次测量　$x_k(t), -\infty < t < +\infty$;

…

其总体记为 $X(t) = \{x_k(t)\}$,称为随机过程[2]。当下标 k 取某定值时,得到 $x_1(t), x_2(t), \cdots$ 称为"样本函数",而当 t 取定值时,如 $t = t_1, t = t_2$ 等,则得到不同的随机变量 $X_1 = \{x_k(t_1)\}, X_2 = \{x_k(t_2)\}$,等等。

随机过程的某一个样本函数 $X_j(t)$ 只是一个偶然的实现,一般说来,仔细研究这一样本函数是没有意义的,因为一个样本函数并不足以代表这一过程的特性和本质。为了揭示其特性和本质,必须从所有的样本函数的总体出发,计算其某些平均量。

3.2.1　总体平均与平稳随机过程

1. 总体平均

总体平均是各样本函数在某时刻的取值 $x_k(t_1)(k = 1, 2, \cdots)$ 的平均值,或者是这些取值的某种函数的平均值。"总体平均"是在各样本函数之间进行的(图 3－1),我们以"E"表示总体平均[3]。

(1) 均值

其定义为

$$\mu_x(t_1) = E[x_k(t_1)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k(t_1) \qquad (3-1)$$

(2) 自相关函数

其定义为

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = E[x_k(t_1)x_k(t_1 + \tau)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [x_k(t_1)x_k(t_1 + \tau)] \qquad (3-2)$$

一般而言，总体平均的自相关函数依赖所选定的起始时刻 t_1 与时移τ，它反映 t_1 与 $t_2=(t_1+\tau)$ 这两个时刻的随机变量 $X_1=\{x_k(t_1)\}$，$X_2=\{x_k(t_2)\}$之间的统计联系。

均值又称为随机过程的一阶平均，而自相关函数称为二阶平均。还可以定义更高阶的平均数，但用得很少。

2. 平稳随机过程

上面讲过，一个随机过程$\{x_k(t)\}$的均值$\mu_x(t_1)$与自相关函数$R_x(t_1,t_1+\tau)$一般与 t_1 有关，这表明此过程的统计特性是随时间变化的，这种过程称为"非平稳的"。如果以上两个参数均与 t_1 无关，则此随机过程称为"弱平稳随机过程"，此时均值成为常数，记为μ_x，而自相关函数仅与 τ 有关，记为 $R_x(\tau)$。

这里"弱"字系指平稳仅对一阶与二阶平均值成立。如果$\{x_k(t)\}$的各阶平均数均与 t_1 无关，则过程称为"强平稳"的。强平稳的过程当然也是弱平稳的，反之则不一定成立。由于高于二阶的平均数很少用到，我们不再严格区分"弱平稳"与"强平稳"，而统称为"平稳随机过程"[4]。

3.2.2 时间平均与各态历经随机过程

1. 时间平均

时间平均就是某一个样本函数$\{x_k(t)\}$，在时间上进行的平均。我们以字母上面的横线"—"表示时间平均。于是有

时间均值

$$\mu_x(k)=\overline{x_k(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_k(t)\mathrm{d}t \tag{3-3}$$

时间自相关函数

$$R_x(k,\tau)=\overline{x_k(t)x_k(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_k(t)x_k(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{3-4}$$

时间均值与时间自相关函数一般会随样本函数而异，即是样

本标号 k 的函数。由于某一个样本函数并不足以反映一个随机过程的全貌，因此，基于某一个样本函数的时间平均一般也不能代表整个随机过程的统计特性。可是在下述的所谓“各态历经”的假设下，却可以用一个样本函数来有效地代表整个随机过程的特性。

2. 各态历经随机过程

客观上存在某些随机过程，其样本在空间上分布的统计特性与其中任一样本在时间上发展的统计特性之间，有着深刻的相似之处。对于这类过程来说，可以认为总体平均与时间平均相等

$$\mu_x(t_1) = \mu_x(k) \tag{3-5}$$

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = R_x(k, \tau) \tag{3-6}$$

满足此条件的过程 $\{x_k(t)\}$ 称为“各态历经”随机过程。“各态历经”亦有“弱”、“强”之分，但实际上多不加以严格区分。

一个过程如果是各态历经的，那么只要抓住其一个样本函数，研究其统计特性，就可掌握其全部样本的统计特性，而免除采集大量样本，计算总体平均的麻烦，从而使一个随机过程的记录、分析工作大为简化，因而这一假定是富有吸引力的。事实上，与许多物理现象相关联的随机过程都可以认为是各态历经的，但是要想严格判断一个过程是不是各态历经的，是非常困难的，通常是凭直观作出这一假定，然后看分析计算的结果是否符合实际，反过来判断这一假定是否可以接受。

3.2.3 随机过程的统计参数

上面讲的均值 μ_x 和自相关函数 $R_x(\tau)$ 是描述随机过程的两个基本的统计参数。这里先讲解 $R_x(\tau)$ 的性质，然后由 μ_x、$R_x(\tau)$ 引出其它常用的几个统计参数。

1. 自相关函数的性质

自相关函数具有以下性质，这里我们仅加以引述，但不加证明。读者可以从有关书籍中找到证明的方法[5]。

(1) $R_x(\tau)$ 是偶函数，即有

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \tag{3-7}$$

(2) 周期函数 $x_k(t)$ 的自相关函数 $R_x(\tau)$ 也是周期函数，并且两者的周期相同。

以上两条表明自相关函数保留了样本函数的周期信息，但是摈弃了其相位信息。这一特点使得自相关函数能够深刻地揭示一个随机过程的本质。因为我们说过，各态历经的随机过程的各个样本均可看作其中某一个样本经随机平移而产生的，因此样本的初相，只是偶然的东西，并无本质意义，而样本函数的周期性，却反映了过程的内在特点。

(3) $R_x(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 时取最大值，即有

$$R_x(0) \geqslant R_x(\tau) \tag{3-8}$$

其意义在于 $\tau = 0$ 时的相关性最强，而一般 τ 越大，则两时刻的随机变量 $\{x_k(t_1)\}$、$\{x_k(t_1+\tau)\}$ 之间的相关性越差，$R_x(\tau)$ 越小。

2. 均方差

均方差即为 $\tau = 0$ 时的自相关函数

$$\phi_x^2 = R_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{3-9}$$

这里假定过程是各态历经的，故采用时间平均。$\phi_x = \sqrt{R_x(0)}$ 则称为均方根。

3. 方差

均值 μ_x 可视为信号的静态成分，而 $x(t) - \mu_x$ 则为信号围绕其均值波动的动态成分，此动态部分的均方值即为方差

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \mu_x]^2\,\mathrm{d}t \tag{3-10}$$

而 σ_x 称为标准差。可证 σ_x^2，ϕ_x 与 μ_x^2 之间有以下关系

$$\sigma_x^2 = \phi_x^2 - \mu_x^2 \tag{3-11}$$

3.2.4 平稳过程的谱分析

我们知道，为了计算非周期激励作用在线性系统上的响应，需

要分析它的频率结构，即对其作 Fourier 变换。如果激励是一个随机过程，如果我们计算它的一个样本函数对于系统的激励作用，是否也可以对之直接进行 Fourier 变换呢？这样做有两个问题：

第一，Fourier 变换对于相位十分敏感。如果一个原函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega)$，则原函数经时间平移以后，$f(t+t_0)$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega)e^{i\omega t_0}$。可是我们知道，各态历经的随机过程 $\{f_k(t)\}$ 的各个样本函数 $f_k(t)$ 可以看作是其中某一个样本经时间的随机平移而形成的。这一时间平移纯系偶然因素，不应进入所求的频率结构。有什么办法既保留 $f_k(t)$ 的频率结构，而又能剔除其相位的影响呢？我们立即想到前面所讲的自相关函数 $R_f(\tau)$，它既保留了 $f_k(t)$ 的频率结构，而又摈弃它的相位影响。

第二，对于一个平稳随机过程 $\{f_k(t)\}$ 来说，其任一样本 $f_k(t)$ 并不会随时间 t 衰减，因而一般并不满足 Fourier 变换存在的条件，即绝对积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_k(t)| \, dt$$

收敛的条件。所幸的是，自相关函数 $R_f(\tau)$ 却一般会随 τ 的增加而下降，这是由于时移 τ 愈长，相关性愈差。因此 $R_f(\tau)$ 的 Fourier 变换一般是存在的。

由此可知，为了得到一个随机过程（或者说其样本函数）的频率特性，我们不应该直接对样本函数本身，而是对其自相关函数进行 Fourier 变换。这样得到的结果称为该随机过程的功率谱密度函数，或简称为“功率谱”成“自谱”。

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau \qquad (3-12)$$

而其逆变换为

$$R_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega\tau} \, d\omega \qquad (3-13)$$

下面我们来解释为何称之为功率谱。设 $f(t)$ 是作用在一个单

位电阻上的电压信号，那么$f^2(t)$则是瞬时功率信号，而平均功率则为

$$\overline{W} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,\mathrm{d}t = R_f(0) \qquad (3-14)$$

令式(3－13)中$\tau=0$，得

$$R_f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,\mathrm{d}\omega \qquad (3-15)$$

将上式代入式(3－14)，得

$$\overline{W} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,\mathrm{d}\omega \qquad (3-16)$$

此式一方面表示平均功率$\overline{W}$的时间结构，即各个瞬时的功率$f^2(t)$对于平均功率$\overline{W}$的贡献；另一方面又表示了平均功率的频率结构，即各种频率的功率成分$S_f(\omega)\mathrm{d}\omega$对于平均功率$\overline{W}$的贡献。因此$S_f(\omega)$被称为“功率”谱。由于频率落在$\omega \sim \omega+\mathrm{d}\omega$的窄带中的激励功率正比于$S_f(\omega)\mathrm{d}\omega$，因此$S_f(\omega)$又称为功率谱“密度”，其量纲为[功率]/[频率]，即单位频率中的功率。

利用相关函数$R_f(\tau)$的偶函数的性质，将式(3－12)和式(3－13)写成三角函数的形式

$$S_f(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_f(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau \qquad (3-17)$$

$$R_f(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_f(\omega)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega \qquad (3-18)$$

令式(3－18)中$\tau=0$，得均方值的另一种计算公式

$$R_f(0) = \phi_f^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_f(\omega)\,\mathrm{d}\omega \qquad (3-19)$$

可以证明$S_f(\omega)$为实的非负偶函数，即有

$$S_f(\omega) \geqslant 0, \quad S_f(\omega) = S_f(-\omega) \qquad (3-20)$$

两个平稳随机过程$\{X(t)\}$、$\{Y(t)\}$的互功率谱密度函数定义为其互相关函数的 Fourier 变换。

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (3-21)$$

而其逆变换关系为

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \qquad (3-22)$$

由于 $R_{XY}(\tau)$ 并不是偶函数，因此 $S_{XY}(\omega)$ 一般为复数。可以证明以下关系成立

$$S_{XY}^{*}(\omega) = S_{XY}(\omega) \qquad (3-23)$$

$$S_{XY}(-\omega) = S_{XY}(\omega) \qquad (3-24)$$

互功率谱密度函数往往又简称为“互谱”。

3.2.5 几种典型的随机过程

利用上述概念，我们可以来定义几种典型的平稳随机过程的模型。

1. 单一频率成分的随机过程

其样本函数、自相关函数与功率谱密度函数如图 3-2(a) 所示。各样本函数是频率为 ω_0 相同而初相不同的谐波。

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (3-25)$$

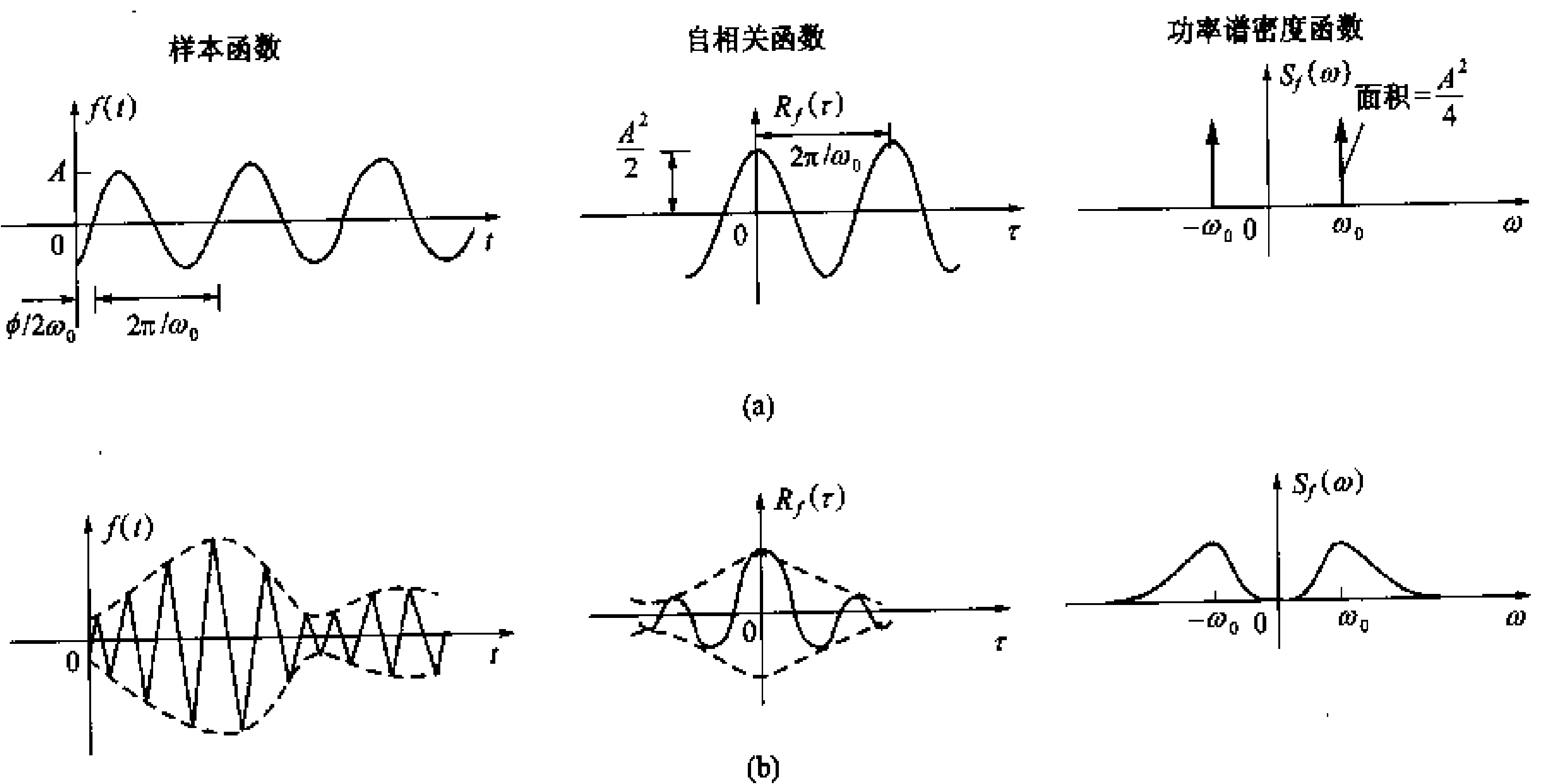
式中：初相 ϕ 为随机变量。自相关函数为

$$\begin{aligned} R_f(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin(\omega_0 t + \phi)\sin[\omega_0(t+\tau)+\phi]dt \\ &= \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\omega_0\tau\sin^2\alpha + \sin\omega_0\tau\sin\alpha\cos\alpha)d\alpha \\ &= \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau \end{aligned} \qquad (3-26)$$

它是频率为 ω_0 的谐波，而且是 τ 的偶函数，其功率谱密度为

$$S_f(\omega) = \frac{\pi A^2}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] \qquad (3-27)$$

为对称分布在 $-\omega_0$、ω_0 位置上的两个 δ - 函数。这是易于理解的，



(a)

(b)

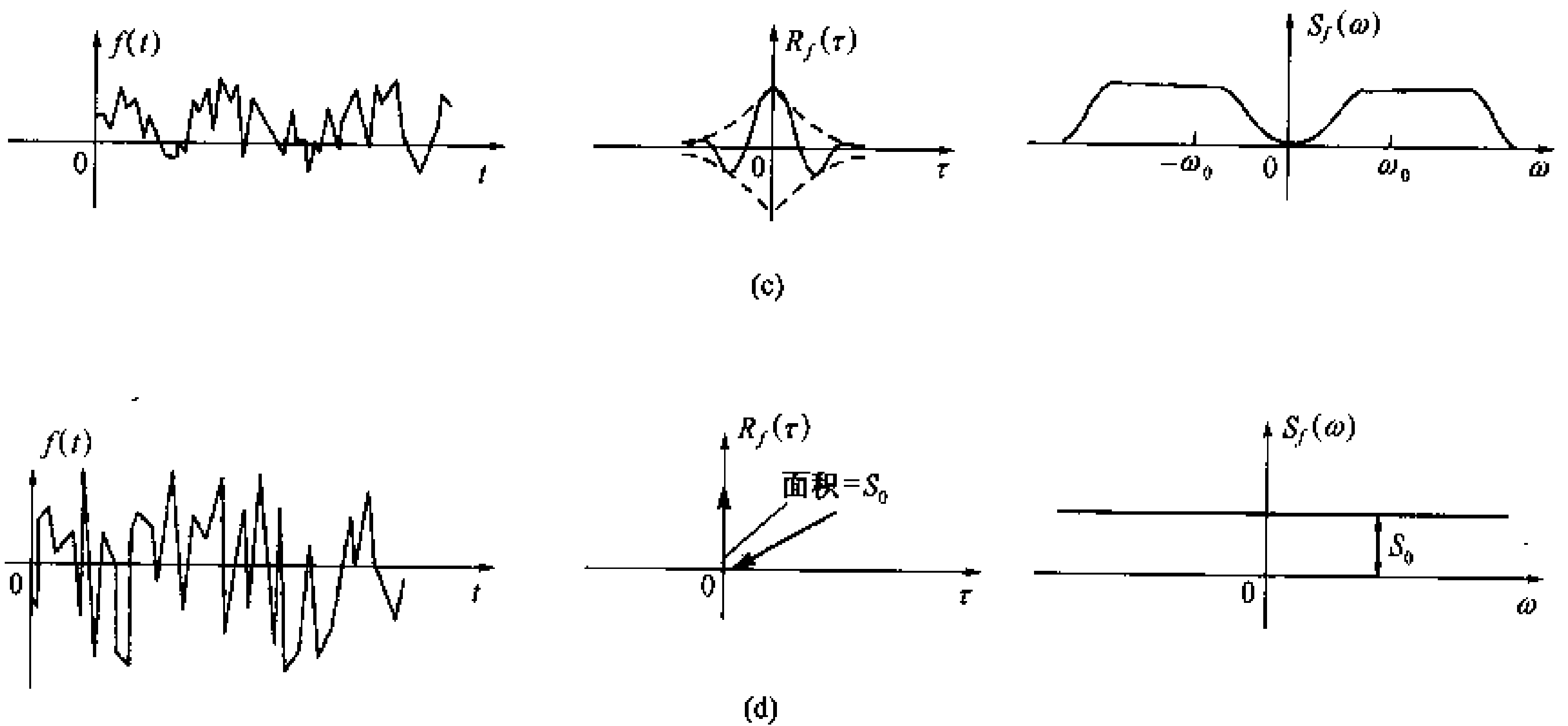


图 3－2　几种典型的随机过程

(a) 单一频率过程；(b) 窄带过程；(c) 宽带过程；(d) 白噪声。

因为其能量集中在 ω_0 这一频率上。

2. 窄带随机过程

窄带随机过程的样本函数并无确定的解析表达式，其外观好像是被缓变随机信号调幅的高频谐波，如图 3 - 2(b)所示。其自相关函数仍然包含样本函数中的主要频率成分，但其振幅逐渐衰减，这表明随着时移 τ 的增加，样本信号前后之间的相关性在下降，其功率谱密度函数表示信号的能量集中在一个比较窄的频带范围内。

3. 宽带随机过程

如图 3 - 2(c)所示，其样本函数包含更多的频率成分，显示出更大的随机性，或者说不确定性。其自相关函数比窄带过程衰减得更快，这表明其样本信号前后的相关性更差。而其功率谱密度函数则具有更大的频宽。

以上从单一频率过程到窄带过程，再到宽带过程，是沿着信号的不确定性上升、前后相关性下降以及频率分布范围变宽的趋势发展的。当将这一趋势推向极端时，就得到一种理想化的随机过程——白噪声。

4. 白噪声

其样本函数具有最大的随机性、不确定性。其前后信号之间的相关性为零，因而自相关函数成为 δ 函数，即

$$R_f(\tau) = S_0\delta(\tau) \qquad (3-28)$$

查 Fourier 变换表我们知道，其功率谱密度函数为一条水平线

$$S_f(\omega) = S_0 \qquad (3-29)$$

这表明白噪声信号中均等地包含各种频率成分，从 $-\infty$ 直到 $+\infty$。我们知道，各种颜色(即各种波长)的光可以组成白光。这里也借用“白”字，将此种信号称为“白噪声”。

将式(3 - 29)代入式(3 - 16)，可知白噪声的平均功率 $\overline{W}$ 为无限大。事实上由式(3 - 28)也可见 $R_f(0) = S_0\delta(0) = \infty$，即均方值 ϕ_f^2 为无限大。这在实际上当然是不可能的。但“白噪声”仍然

是非常有用的一种随机过程的模型。事实上，只要作为激励的宽带随机过程的带宽足以覆盖系统具有显著响应的频带范围，就可以将其作为一个白噪声过程来看待，从而在测试分析上带来很大的简化。

3.3 平稳过程通过线性系统的分析

本节我们用随机过程的基本知识来解决线性系统在随机激励下的响应问题。假定已知系统的动态特性与激励随机过程的统计参数，主要是均值 μ_f、自相关函数 R_f 与功率谱密度函数 S_f，而需要求得响应过程的统计参数：μ_x、R_x 和 S_x 等。需要强调的是，我们的策略是直接由激励的统计参数求出响应的统计参数，即在高一级的层次上直接进行计算，如图 3－3 所示，而不是去计算系统对于各个激励样本的响应。

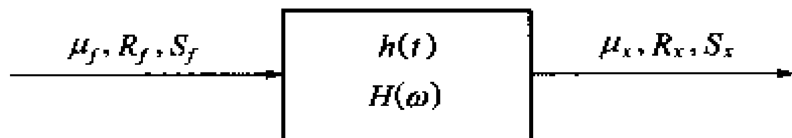


图 3－3

1. 均值

设平稳随机过程 $\{f_k(t)\}$ 的均值为 μ_f，线性系统的脉冲响应函数为 $h(t)$。$\{f_k(t)\}$ 的每一个样本函数 $f_k(t)$ $(k=1,2,\cdots)$ 作用在该系统上，均会有一个确定的响应

$$x_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) f_k(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \qquad (k = 1,2,\cdots) \tag{3-30}$$

所有的 $x_k(t)$ 组成一个响应的随机过程 $\{x_k(t)\}$，其均值为

$$\mu_x = E[x_k(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) f_k(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) E[f_k(t - \lambda] \mathrm{d}\lambda \tag{3-31}$$

由于$\{f_k(t-\lambda)\}$是平稳随机过程,故

$$E[f_k(t - \lambda)] = E[f_k(t)] = \mu_f$$

而式(3-31)成为

$$\mu_x = \mu_f \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \mathrm{d}\lambda \tag{3-32}$$

但由式(1-67)知

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \mathrm{d}\lambda = H(0)$$

式中:$H(0)$是系统的频率响应函数$H(\omega)$当$\omega=0$时的值,即静态放大系统,代入式(3-32),得

$$\mu_x = H(0)\mu_f \tag{3-33}$$

这表明平稳随机过程作用在线性系统上,其响应的均值μ_x也是与时间无关的常数,而且等于系统的静态放大系统$H(0)$与激励过程的均值μ_f之乘积。特殊地,当$\mu_f=0$时,亦有$\mu_x=0$。

2. 自相关函数

响应的自相关函数为,按定义

$$R_x(\tau) = E[x_k(t)x_k(t+\tau)]$$

而按 Duhamel 方程,我们知道

$$x_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) f_k(t - \lambda) \mathrm{d}\lambda$$

$$x_k(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) f_k(t + \tau - \lambda) \mathrm{d}\lambda$$

代入上式,即为

$$R_x(\tau) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) f_k(t - \lambda_1) \mathrm{d}\lambda_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2) f_k(t + \tau - \lambda_2) \mathrm{d}\lambda_2\right]$$

由

$$E[f_k(t-\lambda_1)f_k(t+\tau-\lambda_2)]$$
$$=E[f_k(t)f_k(t+\tau+\lambda_1-\lambda_2)]=R_f(\tau+\lambda_1-\lambda_2)$$

代入上式,得

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_f(\tau+\lambda_1-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2 \tag{3-34}$$

注意到,$R_x(\tau)$仅由时移τ决定,而与时间起点t无关。式(3-33)和式(3-34)表明,如果激励是平稳随机过程,则响应也是平稳随机过程。

3. 功率谱密度函数

响应的功率谱密度函数可计算如下

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{3-35}$$

将式(3-34)代入上式,得

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_f(\tau+\lambda_1-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\right]\mathrm{d}\tau \tag{3-36}$$

由于 $$R_f(\tau+\lambda_1-\lambda_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_f(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau+\lambda_1-\lambda_2)}\mathrm{d}\omega$$

将此式代入式(3-36),得

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_f(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\lambda_1}\mathrm{d}\lambda_1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\lambda_2}\mathrm{d}\lambda_2\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega\right\}\mathrm{d}\tau \tag{3-37}$$

又由于 $$\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\lambda_1}\mathrm{d}\lambda_1=H(-\omega)=H^*(\omega);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\lambda_2}\mathrm{d}\lambda_2=H(\omega)$$

代入式(3-37),得

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)H^*(\omega)H(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega\right]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,|H(\omega)|^2 e^{i\omega\tau}\,d\omega\right]d\tau \quad (3-38)$$

将上式与式(3 - 35)比较,有

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,|H(\omega)|^2 e^{i\omega\tau}\,d\omega \quad (3-39)$$

此式将激励的 $S_f(\omega)$ 与响应的 $R_x(\tau)$ 联系起来。另一方面,我们又应该有

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega \quad (3-40)$$

比较式(3 - 39)与式(3 - 40),得

$$S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (3-41)$$

此式将响应的功率谱密度与激励的功率谱密度联系起来。

令 $\tau=0$,即得响应的均方值

$$\phi_x^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_f(\omega)\,d\omega \quad (3-42)$$

式(3 - 33)、式(3 - 34)与式(3 - 41)分别将响应的 μ_x、$R_x(\tau)$ 和 $S_x(\omega)$ 与激励的 μ_f、$R_f(\tau)$ 和 $S_f(\omega)$ 直接地、一对一地联系起来,这表明对于线性系统来说,我们可以撇开个别的样本函数,而直接在统计参数的总体层次上进行分析与计算。

3.4 单自由度线性系统对于平稳随机过程的响应

3.4.1 单自由度线性系统对随机激励的响度

现在我们设线性系统是一个单自由度的振动系统,其运动方程为

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 f(t) \quad (3-43)$$

设激励$f(t)$为各态历经的正态白噪声,其均值为μ_f,自相关函数为$R_f(\tau)=S_0\delta(\tau)$,功率谱密度函数为$S_f(\omega)=S_0$。由前所述,响应亦应为各态历经的正态过程,如果能求出其μ_x与ϕ_x^2即可确定其概率分布与统计特性。

由于激励的μ_f相当于一恒力,仅使系统产生一静态位移μ_x,可以将之分开处理。因此,不失一般性,可以假设激励与响应都是零均值的。已知单自由度系统的频率响应特性的模的平方为

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} \qquad (3-44)$$

而其图形如图 3-4 所示。由式(3-41)即得响应的功率谱密度函数为

$$S_x(\omega)=S_f(\omega)|H(\omega)|^2=\frac{S_0}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} \qquad (3-45)$$

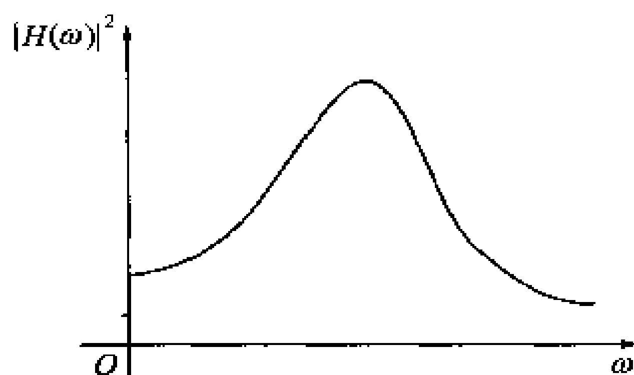


图 3-4　单自由度线性系统的频响特性的模方

其图形如图 3-5 所示。值得注意的是,白噪声通过一个线性系统以后,不再是白噪声了,而成为一种窄带噪声,或者形象地说,一种"粉红噪声"。从这个意义上讲,线性系统像一个"染缸",可以将通过它的信号染上"粉红色"。

按式(3-42),可计算均方值

$$\phi_x^2 = R_x(0) = \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} = \frac{S_0\omega_n}{4\xi} \tag{3-46}$$

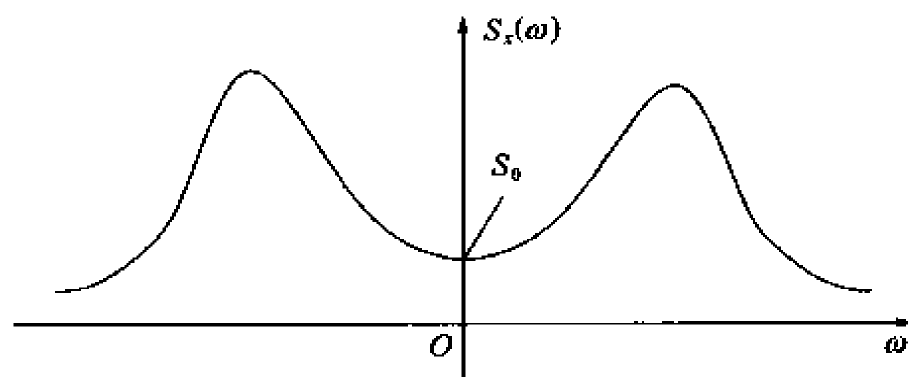


图 3－5　单自由度线性系统对于随机激励的响应的功率谱密度

完成以上积分需要一些技巧。我们也可以先求 $R_x(\tau)$，然后再由 $R_x(0)$ 求 ϕ_x^2。已知单自由度系统的脉冲响应函数为

$$h(t) = u(t)\frac{\omega_n^2}{\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{3-47}$$

式中 $u(t)$ 为阶跃函数，由式(3－34)，得

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u(\lambda_1)\frac{\omega_n^2}{\omega_d}e^{-\xi\omega_n\lambda_1}\sin\omega_d\lambda_1\right] \\ &\quad \left[u(\lambda_2)\frac{\omega_n^2}{\omega_d}e^{-\xi\omega_n\lambda_2}\sin\omega_d\lambda_2\right]\times \\ &\quad R_f(\tau+\lambda_1-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \frac{S_0\omega_n^4}{\omega_d^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\xi\omega_n(\lambda_1+\lambda_2)}\sin\omega_d\lambda_1\sin\omega_d\lambda_2 \cdot \\ &\quad \delta(\tau+\lambda_1-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2 \end{aligned} \tag{3-48}$$

先假定 $\tau>0$，利用 δ 函数的筛性质，并对 λ_2 积分，有

$$R_x(\tau) = \frac{S_0\omega_n^4}{\omega_d^2}\int_0^{\infty}e^{-\xi\omega_n(2\lambda_1+\tau)}\sin\omega_d\lambda_1\sin\omega_d(\tau+\lambda_1)\mathrm{d}\lambda_1 \tag{3-49}$$

利用三角函数的性质及积分表,可得上式积分的结果

$$R_x(\tau)=\begin{cases}\dfrac{S_0\omega_n}{4\xi}e^{-\xi\omega_n\tau}\left[\cos\omega_d\tau+\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d\tau\right] & (\tau>0)\\ \dfrac{S_0\omega_n}{4\xi}e^{-\xi\omega_n\tau}\left[\cos\omega_d\tau-\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d\tau\right] & (\tau<0)\end{cases}$$

(3 - 50)

式中:当$\tau<0$时结果,由$R_x(\tau)$为偶函数的性质得到。

3.4.2 单自由度线性系统对多个随机激励的响应

现在来分析M个平稳随机激励作用下线性系统的响应。这种系统可以用下列常系数线性微分方程表示[6]

$$\sum_{k=0}^{n}a_kY^{(k)}=\sum_{r_1=0}^{m_1}b_{1,r_1}X_1^{(r_1)}+\sum_{r_2=0}^{m_2}b_{2,r_2}X_2^{(r_2)}+\cdots+\sum_{r_M=0}^{m_M}b_{M,r_M}X_M^{(r_M)}$$

(3 - 51)

式中:$Y^{(k)}$与$X_j^{(r_j)}$分别表示Y与X_j对t的k阶与r_j阶导数,并且约定$Y^{(0)}=Y$,$X_j^{(0)}=X_j$。

1. 频率响应函数 $H_j(\omega)$ 和单位脉冲响应函数 $h_j(t)$

对于式(3 - 51)表示的系统,设仅有一个激励X_1作用,而其它$M-1$个激励都等于零时,系统的频率响应函数为$H_1(\omega)$,单位脉冲响应函数为$h_1(t)$,响应为$Y_1(t)$。同样,设仅一个激励X_j作用,而其它$M-1$个激励都等于零时,系统的频率响应函数为$H_j(\omega)$,单位脉冲响应函数为$h_j(t)$,响应为$Y_j(t)$。

在式(3 - 51)中,仅保留X_j,而令其它$M-1$个激励都等于零时,可以得到

$$H_j(\omega)=\frac{\sum\limits_{r_j}^{m_j}b_{j,r_j}(\mathrm{i}\omega)^{r_j}}{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(\mathrm{i}\omega)^k}\qquad(j=1,2,\cdots,M)\qquad(3-52)$$

由 $H_j(\omega)$ 经 Fourier 逆变换就是 $h_j(t)$。从而系统在一个激励 X_j 作用下的响应为

$$Y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\tau) X_j(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3-53}$$

我们把 $H_j(\omega)$ 称为对应于 X_j 与 Y_j 的频率响应函数，把 $h_j(t)$ 称为对应于 X_j、X_j 的单位脉冲响应函数。

由叠加原理，式(3-51)表示的线性定常系统在 M 个激励作用下的响应为

$$Y(t) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_M = \sum_{j=1}^{M} Y_j$$

将式(3-53)代入上式，得到

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\tau) X_j(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3-54}$$

2. 响应的数学期望、自相关函数和功率谱密度函数

有两个激励时系统的响应的数学期望为

$$E(Y) = E(X_1)H_1(0) + E(X_2)H_2(0)$$

运用数学归纳法可直接得到 M 个激励时系统响应 Y 的数学期望为

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{M} E(X_j)H_j(0) = [H(0)]^{\mathrm{T}}[E(X)] \tag{3-55}$$

有两个激励时响应的自相关函数可以写成

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} h_j(\xi)h_j(\eta)R_{X_jX_k}(\tau+\xi-\eta)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{3-56}$$

运用数学归纳法可直接得到 M 个激励时系统响应 Y 的自相关函数

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} h_j(\xi)h_j(\eta)R_{X_jX_k}(\tau+\xi-\eta)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{3-57}$$

对系统响应 Y 的自相关函数 $R_Y(\tau)$ 进行 Fourier 变换，可以得到响应的自功率谱密度 $S_Y(\omega)$

$$S_Y(\omega) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} H_j^*(\omega)H_k(\omega)S_{X_jX_k}(\omega) \qquad (3-58)$$

3.5 多自由度线性系统对于随机激励的响应

基于随机过程的联合性质的知识，现在我们可以进一步讨论多自由度系统对于随机激励的响应。

3.5.1 两个自由度系统的激励与响应之间的联合性质

设有两个线性系统，如图 3-6 所示，其脉冲响应函数分别为 $h_r(t)$、$h_s(t)$，频率响应函数分别为 $H_r(\omega)$、$H_s(\omega)$，其激励的随机过程分别为 $\{f_r(t)\}$、$\{f_s(t)\}$，而响应的随机过程分别为 $\{q_r(t)\}$、$\{q_s(t)\}$，这里假设各随机过程均为各态历经的。

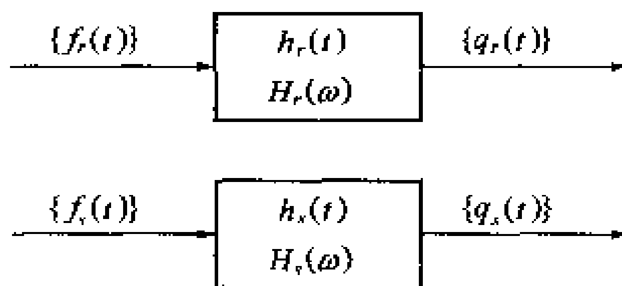


图 3-6

两系统的响应的互相关函数为

$$R_{q_rq_s}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} q_r(t)q_s(t+\tau)\,\mathrm{d}t \qquad (3-59)$$

式中

$$q_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_r(\lambda_r)f_r(t-\lambda_r)\,\mathrm{d}\lambda_r \qquad (3-60)$$

$$q_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_s(\lambda_s)f_s(t-\lambda_s)\,\mathrm{d}\lambda_s \qquad (3-61)$$

代入式(3-59),得

$$R_{q_rq_s}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h_r(\lambda_r)f_r(t-\lambda_r)\mathrm{d}\lambda_r\right]$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h_s(\lambda_s)f_s(t+\tau-\lambda_s)\mathrm{d}\lambda_s\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h_r(\lambda_r)h_s(\lambda_s)\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_r(t-\right.$$

$$\left.\lambda_r)f_s(t+\tau-\lambda_s)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda_r\mathrm{d}\lambda_s \qquad (3-62)$$

由于过程是各态历经的,因而也是平稳的,因而被积函数的时间可以平移,而并不会影响式(3-62)方括号中的积分结果,即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_r(t-\lambda_r)f_s(t+\tau-\lambda_s)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_r(t)f_s(t+\tau+\lambda_r-\lambda_s)\mathrm{d}t$$

$$=R_{f_r}R_{f_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s) \qquad (3-63)$$

代入式(3-62),得到两系统响应的互相关函数与激励的互相关函数之间的关系式

$$R_{q_rq_s}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h_r(\lambda_r)h_s(\lambda_s)R_{f_rf_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s)\mathrm{d}\lambda_r\mathrm{d}\lambda_s$$

$$(3-64)$$

当 $r=s$ 时,上式即为式(3-34)。

以下计算两系统的响应的互功率谱密度函数。为此,对式(3-64)取 Fourier 变换

$$S_{q_rq_s}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{q_rq_s}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h_r(\lambda_r)h_s(\lambda_s)R_{f_rf_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s)\mathrm{d}\lambda_r\mathrm{d}\lambda_s\right]\mathrm{d}\tau=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h_r(\lambda_r)h_s(\lambda_s)\mathrm{d}\lambda_r\mathrm{d}\lambda_s\left[\int_{-\infty}^{+\infty}R_{f_rf_s}(\tau+\lambda_r-\lambda_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

(3 - 65)

对于式(3 - 65),利用 Fourier 变换的位移性质

$$S_{q_rq_s}(\omega)=S_{f_rf_s}(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\lambda_s}h(\lambda_s)\mathrm{d}\lambda_s\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\lambda_r}h(\lambda_r)\mathrm{d}\lambda_r$$

(3 - 66)

问题的关键在于如何计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\lambda_r}h(\lambda_r)\mathrm{d}\lambda_r$,将 $H_s(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\lambda_s}h(\lambda_s)\mathrm{d}\lambda_s$ 代入上式

$$S_x(\omega)=S_{f_rf_s}(\omega)H_s(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\lambda_r}h(\lambda_r)\mathrm{d}\lambda_r \quad (3-67)$$

令 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\lambda_r}h(\lambda_r)\mathrm{d}\lambda_r=H_r(-\omega)\equiv H_r^*(\omega)$,并代入上式得

$$S_{q_rq_s}(\omega)=H_s(\omega)H_r^*(\omega)S_{f_rf_s}(\omega) \quad (3-68)$$

当 $r=s$ 时,上式即为式(3 - 41)。

式(3 - 68)的一个很有用的特例是当 $\{f_r(t)\}=\{f_s(t)\}$,且 $H_s(\omega)\equiv1$ 时,式(3 - 68)成为

$$S_{q_rf_r}(\omega)=H_r^*(\omega)S_{f_r}(\omega) \quad (3-69)$$

对上式两边同时取复共轭,有

$$S_{f_rq_r}(\omega)=H_r(\omega)S_{f_r}(\omega) \quad (3-70)$$

上式表示一个系统的激励谱与其激励和响应的互谱之间的关系。

3.5.2 多自由度系统对随机激励的响应

在分析多自由度系统对于随机激励的响应时,我们仍然要用到第 1 章关于"解耦"的知识和方法。设系统的运动方程为

$$[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{p(t)\}$$

(3 - 71)

式中：$\{x(t)\}$为位移矢量；$\{p(t)\}$为激励矢量。还假定已经对相应的无阻尼系统进行了模态分析，而经正规化的模态矩阵为

$$[u] = [\{u^{(1)}\},\{u^{(2)}\},\cdots,\{u^{(n)}\}] \tag{3-72}$$

对之作线性变换，由物理坐标$\{x(t)\}$变到广义坐标$\{q(t)\}$，有

$$\{x(t)\} = [u]\{q(t)\} \tag{3-73}$$

将式(3-73)代入式(3-71)，并在等号两边同乘以$[u]^{\mathrm{T}}$得

$$[u]^{\mathrm{T}}[m][u]\{\ddot{q}(t)\} + [u]^{\mathrm{T}}[c][u]\{\dot{q}(t)\} + [u]^{\mathrm{T}}[k][u]\{q(t)\} = [u]^{\mathrm{T}}\{p(t)\} \tag{3-74}$$

因为$[u]^{\mathrm{T}}[m][u]=E$，故上式变为

$$\{\ddot{q}(t)\} + [u]^{\mathrm{T}}[c][u]\{\dot{q}(t)\} + [u]^{\mathrm{T}}[k][u]\{q(t)\} = [u]^{\mathrm{T}}\{p(t)\} \tag{3-75}$$

新的阻尼矩阵为

$$[u]^{\mathrm{T}}[c][u] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\xi\omega & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{3-76}$$

而新的刚度矩阵为

$$[u]^{\mathrm{T}}[k][u] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{3-77}$$

另外，为将激励变为$kf(t)$的形式，将激励作如下变换

$$[u]^{\mathrm{T}}\{p(t)\} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}^{-1} [u]^{\mathrm{T}}\{p(t)\} \tag{3-78}$$

令

$$\{f(t)\} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}^{-1} [u]^{\mathrm{T}} \{p(t)\} \qquad (3-79)$$

综合式(3－75)～式(3－79)，则有

$$\ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}(t) + \omega_r^2 q(t) = \omega_r^2 f_r(t) \qquad (r = 1,2,\cdots,n) \qquad (3-80)$$

称$f_r(t)(r=1,2,\cdots,n)$为广义力。如果激励矢量$\{p(t)\}$的每一个分量都为确定的函数，于是式(3－80)中的每一个方程相当于一个独立的单自由度系统，按单自由度系统求解即可。

现在我们假设$\{p(t)\}$的每一个分量是一个各态历经的随机过程，而且具有零均值和正态分布，因此$\{x(t)\}$、$\{q(t)\}$和$\{f(t)\}$的每一个分量也是一个各态历经的、零均值的、正态分布的随机过程。

我们知道，对于一个零均值的正态随机过程来说，它的相关函数或者功率谱密度函数就可以完全地描绘其统计特性。因此，我们在求解多自由度系统对于随机激励的响应时，目的就在于由激励$\{q(t)\}$的相关函数或功率谱计算出响应$\{x(t)\}$的相关函数或功率谱。由于问题涉及到多个随机过程之间的互相关与自相关函数、互谱与自谱，我们采用矩阵的形式，以便将推导过程与结果表达成紧凑的形式。

1. 坐标变化关系

响应的物理坐标相关矩阵定义为

$$[R_x(\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \{x(t)\}\{x(t+\tau)\}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}t \qquad (3-81)$$

这里，$\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}^{\mathrm{T}}$为列矢量，其中每一分量为一随机过程。事实上$[R_x(\tau)]$为$n\times n$矩阵

$$[R_x(\tau)] = [R_{x_j x_k}(\tau)] \qquad (3-82)$$

式中

$$R_{x_jx_k}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_j(t)x_k(t+\tau)\,\mathrm{d}t \qquad (j,k=1,2,\cdots,n)$$

(3-83)

对以下的其它统计参数矩阵也应作同样理解。

响应的广义坐标相关矩阵定义为

$$[R_q(\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{q(t)\}\{q(t+\tau)\}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \quad (3-84)$$

将式(3-73)代入式(3-81),则有

$$[R_x(\tau)] = [u][R_q(\tau)][u]^{\mathrm{T}} \quad (3-85)$$

同样,物理力的相关矩阵定义为

$$[R_p(\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{p(t)\}\{p(t+\tau)\}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \quad (3-86)$$

广义力的相关矩阵定义为

$$[R_f(\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(t)\}\{f(t+\tau)\}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \quad (3-87)$$

将式(3-79)代入式(3-87),则两者的坐标变换关系为

$$[R_f(\tau)] = \begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}^{-1}[u]^{\mathrm{T}}[R_p(\tau)][u]\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}^{-1}$$

(3-88)

2. Fourier 变换关系

响应的物理坐标相关矩阵经 Fourier 变换即得到响应的物理坐标的功率谱矩阵

$$[S_x(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[R_x(\tau)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \quad (3-89)$$

此式代表 $n\times n$ 个变换式。

$$S_{x_kx_j}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}R_{x_kx_j}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \qquad (k,j=1,2,\cdots,n)$$

(3-90)

式(3－89)的逆变换为

$$[R_x(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[S_x(\omega)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (3-91)$$

类似地，在$[R_q(\tau)]$与$[S_q(\omega)]$、$[R_p(\tau)]$与$[S_p(\omega)]$、$[R_f(\tau)]$与$[S_f(\omega)]$之间都存在 Fourier 正、逆变换的关系

$$[S_q(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[R_q(\tau)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad (3-92)$$

$$[R_q(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[S_q(\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (3-93)$$

$$[S_p(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[R_p(\tau)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad (3-94)$$

$$[R_p(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[S_p(\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (3-95)$$

$$[S_f(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[R_f(\tau)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad (3-96)$$

$$[R_f(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[S_f(\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (3-97)$$

将式(3－89)、式(3－91)～式(3－97)这一组公式与式(3－85)、式(3－88)结合起来，即可得出$[S_x(\omega)]$与$[S_q(\omega)]$之间，$[S_f(\omega)]$与$[S_p(\omega)]$之间的坐标变换公式。事实上，将式(3－85)代入式(3－89)，得

$$\begin{aligned}[S_x(\omega)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}[R_x(\tau)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= [u]\int_{-\infty}^{+\infty}[R_q(\tau)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau[u]^{\mathrm{T}} \qquad (3-98)\end{aligned}$$

将式(3－92)代入上式，有

$$[S_x(\omega)] = [u][S_q(\omega)][u]^{\mathrm{T}} \qquad (3-99)$$

此式即为$[S_x(\omega)]$与$[S_q(\omega)]$之间的坐标变换关系。同理可得$[S_f(\omega)]$与$[S_p(\omega)]$之间的坐标变换关系为

$$[S_f(\omega)] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}^{-1} [u]^T [S_p(\omega)] [u] \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}^{-1} \tag{3-100}$$

3. 系统变换

系统变换指的是由激励的统计参数经过系统以后，变成了响应的统计参数。最方便的系统变换是由$[S_f(\omega)]$变为$[S_q(\omega)]$，其变换式为

$$[S_q(\omega)] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H^*(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} [S_f(\omega)] \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{3-101}$$

当$\{q(t)\}$为系统的自然坐标，而$\{f(t)\}$是与自然坐标相联系的广义力时，矩阵$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H^*(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$均为对角阵，将上式展开得

$$\begin{bmatrix} S_{q_1q_1} & S_{q_1q_2} & \cdots & S_{q_1q_n} \\ S_{q_2q_1} & S_{q_2q_2} & \cdots & S_{q_2q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{q_nq_1} & S_{q_nq_2} & \cdots & S_{q_nq_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^*(\omega) & & & \\ & H_2^*(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_n^*(\omega) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} S_{f_1f_1} & S_{f_1f_2} & \cdots & S_{f_1f_n} \\ S_{f_2f_1} & S_{f_2f_2} & \cdots & S_{f_2f_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{f_nf_1} & S_{f_nf_2} & \cdots & S_{f_nf_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_1(\omega) & & & \\ & H_2(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_n(\omega) \end{bmatrix}$$

从展开式中可以看出它相当于 $n\times n$ 个等式

$$S_{q_r q_s}(\omega)=H_r^*(\omega)H_s(\omega)S_{f_r f_s}(\omega)\qquad(r,s=1,2,\cdots,n)\tag{3-102}$$

此即为式(3-68),该式已就两个独立的单自由度系统加以证明。由式(3-99)、式(3-100)和式(3-101)便可以得出物理坐标下的系统的变换关系,即$[S_x(\omega)]$与$[S_p(\omega)]$间的变换关系。

以上我们讲述了多自由度系统所受到的随机激励与随机响应的"坐标变换"、"Fourier 变换"与"系统变换"关系。基于此,我们可以由激励的相关矩阵$[R_p(\tau)]$计算出响应的相关矩阵$[R_x(\tau)]$,其中$[R_p(\tau)]$可以实际测试获得,也可基于一定的理论模型推算出来。而得到的$[R_x(\tau)]$也可由实验加以验证。

由$[R_p(\tau)]$到$[R_x(\tau)]$的计算过程如图 3-7 所示。图上注明了变换的种类及相应的公式号。由式(3-91)、式(3-99)与式

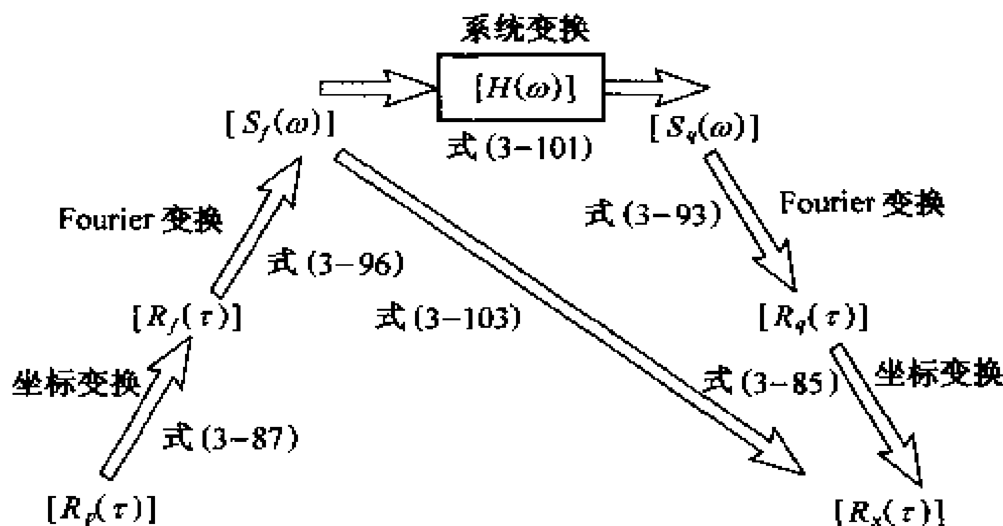


图 3-7 由激励相关矩阵求响应相关矩阵的计算过程

(3-101)联立,即有

$$[R_x(\tau)]=\frac{1}{2\pi}[u]\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & H^*(\omega) & \\ & & \ddots\end{bmatrix}[S_f(\omega)]\cdot$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} e^{i\omega\tau} \mathrm{d}\omega [u]^T \tag{3-103}$$

其中 $x_j(t)$ 的自相关函数为

$$[R_{x_j}(\tau)] = \frac{1}{2\pi}[u_j] \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H^*(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} [S_f(\omega)] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} e^{i\omega\tau} \mathrm{d}\omega [u_j]^T \tag{3-104}$$

其中

$$[u_j] = [u_j^{(1)}, u_j^{(2)}, \cdots, u_j^{(n)}] \tag{3-105}$$

即模态矩阵的第 j 行组成的行矢量。

令上式中 $\tau = 0$，得第 j 坐标上响应的均方值

$$\phi_{x_j}^2 = [R_{x_j}(0)] = \frac{1}{2\pi}[u_j] \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H^*(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} [S_f(\omega)] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & H(\omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \mathrm{d}\omega [u_j]^T \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-106}$$

3.6 连续结构对随机激励的响应

这里我们来研究确定连续弹性结构受分布随机力 $f(x,t)$ 激励的均方响应 $\overline{y^2(x,t)}$ 的问题。我们用主振型求和方法来探讨这个问题[7]。

$$y(x,t) = \sum_j \phi_j(x) q_j(t) \tag{3-107}$$

式中：$\phi_j(x)$是结构的主振型，我们可以应用前面关于单自由度系统响应的知识。对此我们必须假设由下式规定的正比阻尼。

$$\int_0^l c(x)\phi_j(x)\phi_k(x)\mathrm{d}s = 0 \tag{3-108}$$

那么，无耦合主振型方程为

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \frac{1}{M_j} f_j(t) \tag{3-109}$$

式中

$$M_j = \int_0^l \phi_j^2(x)\mathrm{d}m = \text{广义质量}$$

$$f_j(t) = \int_0^l f(x,t)\phi_j(x)\mathrm{d}x = \text{广义力}$$

在构成$y(x,t)$的均方响应中，下列求和是必须加以考虑的。

$$\overline{y^2(x,t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y^2(x,t)\mathrm{d}t =$$

$$\sum_j\sum_k \phi_j(x)\phi_k(x)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} q_j(t)q_k(t)\mathrm{d}t \tag{3-110}$$

应注意到我们关注的是$q_j(t)$和$q_k(t)$的互相关函数，该互相关函数可以用Fourier变换的频率积分来代替

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} q_j(t)q_k(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}Q_j(\omega)Q_k^*(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{3-111}$$

式中：后面的大写字母表示相应量的Fourier变换。同时我们知道，广义坐标的互功率谱密度函数$S_{q_jq_k}(\omega)$与激励力的互功率谱密度函数$S_{f_jf_k}(\omega)$的关系为

$$S_{q_jq_k}(\omega) = H_j(\omega)H_k^*(\omega)S_{f_jf_k}(\omega) \tag{3-112}$$

综合式(3－110)与式(3－112)可得

$$\overline{y^2(x,t)} = \sum_j \sum_k \phi_j(x)\phi_k(x) \int_{-\infty}^{+\infty} H_j(\omega)H_k^*(\omega)S_{f_jf_k}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{3-113}$$

为求上述问题的响应谱，首先要求出自相关函数，由定义得

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

然后，由 $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$ 求出响应的功率谱密度函数。

参考文献

[1] 师汉民，谌刚，吴雅. 机械振动系统——分析 · 测试 · 建模 · 对策. 武汉：华中理工大学出版社，1992.

[2] 林元烈，梁宗霞. 随机数学引论. 北京：清华大学出版社，2003.

[3] 庄楚强，吴亚森. 应用数理统计基础. 广州：华南理工大学出版社，2002.

[4] 刘次华. 随机过程及其应用. 北京：高等教育出版社，2004.

[5] 白艳萍，雷英杰，杨明. 复变函数与积分变换. 北京：国防工业出版社，2004.

[6] 胡津亚，曾三元. 现代随机振动. 北京：中国铁道出版社，1989.

[7] W. T. 汤姆逊著. 振动理论及其应用. 胡宗武译. 北京：煤炭工业出版社，1980.

第4章　非线性系统的振动

前面三章讨论的系统都是线性系统，但严格地讲，描述振动系统的方程大多是非线性的。对于那些非线性因素较弱，略去非线性因素又不从根本上影响最后结果的问题，我们可以用线性方程代替非线性方程，这种方法称为线性化方法。对于很多问题，这种简化是合理的。面对某些非线性问题，这样简化误差根大，甚至带来质的变化，这是不允许的。因此有必要研究非线性系统的振动。

由于线性微分方程理论已经发展得比较完善，所以线性振动理论也发展得相当完善。作为线性振动理论的基础之一——叠加原理，在非线性振动系统中不再适用，因而线性振动理论中的一系列的方法和定理，例如，模态叠加法、暂态振动中杜哈梅（Duhamel）积分、模态分析和模态综合等，在非线性振动理论中都不再适用[1,2]。

线性振动系统的解具有唯一性，而一个非线性系统往往有几个平衡状态和周期解。其中有些周期解和平衡状态是稳定的，即可以实现的；而另一些周期解和平衡状态是不稳定的，即不可以实现的。因而，研究非线性振动解的形式和研究解的稳定性是不可分离的。对于含参数的非线性振动系统，当参数变化并经过某些临界点时，系统的定性性态（如平衡状态或周期运动的数目和稳定性等）会发生突然变化，这种理象称为分岔[3]。

单自由度线性振动系统在谐波激励下的响应仍然是谐波，且响应频率与激励频率相同。非线性系统受迫振动响应会出理与激励力同频率的成分，即主共振响应，有时还会出理不同频率的成分，包括次谐波、超谐波和超次谐波响应等。此外，非线性振动系统还可能出现更为复杂的振动现象——混沌振动。混沌振动是指

在确定性振动系统中出现的一种对初始条件极为敏感、貌似无规则的、类似随机的运动[4]。

4.1 非线性振动系统的运动微分方程

线性系统的运动方程可写为

$$m\ddot{x} = F(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) \tag{4-1}$$

式中：$F(t)$为外作用力；$c\dot{x}(t)$为阻尼力；$kx(t)$为弹性恢复力。上式包含了一个明显的假定：阻尼力和弹性恢复力分别与振动位移$x(t)$和振动速度$\dot{x}(t)$成正比。但是一般阻尼力与弹性恢复力同$x(t)$、$\dot{x}(t)$之间存在着较为复杂的非线性关系

$$m\ddot{x} = F(t) - P(x,\dot{x}) \tag{4-2}$$

只有当x、$\dot{x}$均较小，即微幅振动的情况下，才可以将$P(x,\dot{x})$函数在$x=0$、$\dot{x}=0$的附近展开成泰勒(Taylor)级数，并仅取其一次项，而略去高次项，从而得到式(4-1)的线性方程。

如果振幅较大，或非线性很强时，这样的简化误差很大，因而必须采用非线性模型。式(4-1)可写为

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x},t) = 0 \tag{4-3}$$

式中：f是单位质量所受到的广义力(包括弹性恢复力、阻尼力和外力)。

根据微分方程中是否显含自变量t，可将振动系统分为自治系统和非自治系统。

4.1.1 自治系统

在非线性自治系统中，广义作用力f是广义位移x与广义速度$\dot{x}$的非线性函数，除通过x、$\dot{x}$而间接地依赖于时间t以外，不直接与时间t有关，即运动微分方程中不显含时间t。单自由度自治系统的运动微分方程可表示为

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \tag{4-4}$$

自治系统还可以进一步分为保守系统和非保守系统。

(1) 保守系统　如果作用于系统的广义作用力是仅与广义坐标有关而与广义速度无关的保守力(有势力),在振动过程中系统的总机械能保持不变,此时系统称为保守系统。其运动微分方程为

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{4-5}$$

(2) 非保守系统　如果系统还受到与广义速度有关的广义作用力的作用(主要是各种类型的阻尼力),则系统是非保守的。其运动微分方程为

$$\ddot{x} + \varphi(x, \dot{x}) + f(x) = 0 \tag{4-6}$$

式中:$\varphi(x, \dot{x})$和$f(x)$可分别称为广义阻尼力和广义弹性恢复力,广义阻尼力也可能仅是广义速度的函数,即为$\varphi(\dot{x})$。

式(4-6)通常可以写为

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x})\dot{x} + f(x) = 0 \tag{4-7}$$

这时,若$f(x)$为保守力,则根据$f(x, \dot{x})$的不同性质,可将非保守系统式(4-7)分为三类:

① $g(x, \dot{x}) > 0$,系统在振动过程中总能量将不断损耗,振动将逐渐衰减。称系统为耗散系统。

② $g(x, \dot{x}) < 0$,系统在振动过程中总能量将不断增长,振动将逐渐增大。称为负阻尼系统。

③ $\left.\begin{array}{l} g(x, \dot{x}) < 0, \text{当} |x|、|\dot{x}| \text{较小时} \\ g(x, \dot{x}) > 0, \text{当} |x|、|\dot{x}| \text{较大时} \end{array}\right\}$

这种情况下,较小的振动将随能量不断增加而增强,较大的振动则随能量的耗损而衰减。最终可以出现适当的定常振动,在每一个振动周期内能量的增加和耗损正好相抵消。这时的振动称为自激振动,系统可称为自激振动系统。范德波尔(VanderPol)振子

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\varepsilon > 0) \tag{4-8}$$

便是一个典型的自激振动系统。

保守系统和耗散系统在振动过程中总能量只能分别为保持不变和逐渐损耗。有时将它们统称为被动系统，以区别自动从能源补充能量的负阻尼系统和自激振动系统。

4.1.2 非自治系统

当系统受到的外力 $F(t)$ 是随时间而变化的动态力，或弹性恢复力和阻尼力与 x、$\dot{x}$ 的关系本身是随时间而变化（即系统本身是时变的）的，则运动微分方程中将显含时间 t。此时，该系统称为非自治系统，其运动微分方程为

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x},t) = 0 \tag{4-9}$$

下面，主要讨论两类非自治系统：

① 强迫振动系统　系统受到随时间而变化但与运动无关的激振力 $p(t)$ 的作用时，激励将作为非齐次项出现在运动微分方程中

$$\ddot{x} + \varphi(x,\dot{x}) + f(x) = p(t) \tag{4-10}$$

我们主要研究激振力 $p(t)$ 随时间周期性变化的情况。这种情况下系统发生的定常周期振动称为强迫振动。相应地，将以式(4-10)表示的系统称为强迫振动系统。若 $\varphi(x,\dot{x}) = 0$ 或 $\varphi(x,\dot{x}) = c\dot{x}$，$f(x) = \alpha x + \beta x^3$，则式(4-10)称为杜芬(Duffing)方程，以该式表示的系统称为杜芬系统。

② 参数激励系统　当弹性恢复力和阻尼力的系数随时间而变化时，就得到了变系数的运动微分方程，例如

$$\ddot{x} + [\varphi(x,\dot{x}) + r(t)\psi(x,\dot{x})] + [f(x) + q(t)e(x)] = 0 \tag{4-11}$$

我们称之为参数激励系统。参数激励系统一般都可以转化为马蒂厄(Mathieu)方程

$$\ddot{x} + (\delta + 2\varepsilon\cos\omega t)x = 0 \tag{4-12}$$

4.2 非线性振动的定性分析方法

非线性微分方程至今还没有一般的解法，只能根据微分方程的特点采用一些特殊的方法来尽可能揭示出系统的某些重要的运动性态。这些方法主要有两个分支：定性方法和定量方法，在实际应用中，这两种方法常常是相辅相成的。

定性方法能直观地显示出微分方程解的主要性质，从而得到非线性系统运动的主要特征。因此，在非线性系统振动问题和非线性微分方程的研究中，定性方法得到了广泛的应用。

相平面法是最直观的定性分析方法之一，但它只适用于维数较低的系统。相平面法利用相轨迹来描绘系统的运动性态。相轨迹的奇点和极限环分别对应于系统的平衡状态和周期运动。分析奇点和极限环的类型可以判断平衡状态和周期运动的稳定性，以及受到扰动后可能具有的振动特性。

4.2.1 相平面、相轨迹

先以单自由度非线性自治系统为例，说明相平面法的特点。设运动微分方程为

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \tag{4-13}$$

作代换 $x_2 = \dot{x}_1$，则式(4－13)可化成一阶方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2) \end{cases} \tag{4-14}$$

若以 x_1(可看作质点的位移)和 x_2(可看作质点的速度)为坐标，作一个坐标平面 x_1ox_2，则系统在每一瞬时的运动状态 $(x, \dot{x})$，可用 x_1 和 x_2 的一对数值 (x_1, x_2) 来表示，而这正好是 x_1ox_2 平面上的一个点；反之，x_1ox_2 平面上的一个点 (x_1, x_2) 对应系统的一个运动状态。故此坐标平面 x_1ox_2 称为相平面(或状态平面)，它表示单自

由度系统所有可能振动状态的集合。由于相平面上每个不同的点对应于系统的不同状态，因此可以用一个动点在相平面上的运动表示系统运动状态的变化，这个相平面上以(x_1,x_2)为坐标。用以表示系统运动状态变化的动点称为相点，相点在相平面上的运动轨迹称为相轨迹（或相轨线），为了表示相点沿相轨迹运动的方向，在相轨迹上标以相应的箭头，如图 4-1 所示。

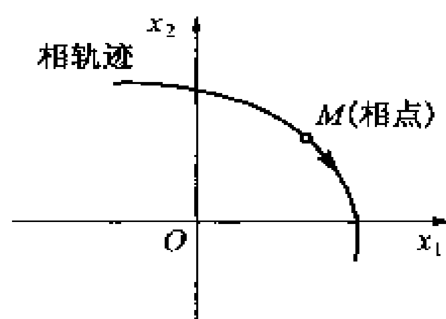


图 4-1 相平面内的相轨迹

相点沿相轨迹运动的速度称为相速度，故式(4-14)可以看作是相速度的投影方程。

按照以上的表示方法，便形成了系统的运动和相平面上的相点之间的一一对应关系：

① 系统在某一瞬时的运动状态(x, $\dot{x}$)对应于该时刻相点在相平面上的一个位置，即相平面上的一个点(x_1,x_2)。

② 系统运动状态的改变对应于相点在相平面上位置的改变。

③ 系统的运动微分方程式(4-13)对应于相速度的投影方程式(4-14)。若将式(4-14)中的两式相除，可得

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{f(x_1, x_2)}{x_2} \tag{4-15}$$

上式表示相平面上的一个方向场，也就是相轨迹曲线的微分方程。

④ 求解系统的运动微分方程式(4-13)，就是求相点在相平面上的运动方程 $x_1 = x_1(t)$ 和 $x_2 = x_2(t)$，也就是求满足方向场式(4-15)的积分曲线族和相点沿此曲线族（相轨迹）运动的规律。对于实际的系统，函数 $f(x_1, x_2)$ 在相平面内连续且对(x_1,x_2)满足李普希茨(Lipschitz)条件，所以式(4-15)应满足解的存在性与唯一性的柯西(Cauchy)条件。故对任意给定的起始条件，必存在唯一的函数组 $x_1 = x_1(t)$ 和 $x_2 = x_2(t)$ 满足式(4-15)和给定的起始条件。

这样，对于单自由度非线性自治系统，用相平面法研究其运动

规律问题，就是根据由运动微分方程变换得到的方向场求出积分曲线族，并求出相点沿此曲线族的运动规律。了解系统运动性质的关键在于了解积分曲线的拓扑结构，而不关心它们的定量变化。同样，相点沿相轨迹运动的定量规律也是不重要的，关键是其运动的方向和特性。所以相平面法是定性方法，它能给出关于系统运动性质的一个全局"图像"。下面，我们再来讨论怎样作出自治系统的相轨迹图来。

由式(4-15)可知，自治系统在相平面中所确定的方向场是驻定的，即相轨迹在每一点处的斜率仅取决于这一点的坐标(x_1，x_2)。令

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-f(x_1,x_2)}{x_2}=\varphi(x_1,x_2)=c \qquad (4-16)$$

式中 c 为常数。将相平面上轨线倾斜度为 c 的诸点连成曲线，称为"等倾线"，取不同的 c 值，$c=c_1$，$c=c_2$，…得到等倾线族，如图4-2所示。设起始点 A 正好落在 $c=c_1$ 的等倾线上，从该点出发，以斜率 c_1、c_2 作射线(如图中虚线所示)，分别交 $c=c_2$ 的等倾线于两点，取此两点所截等倾线弧段的中点 B，则线段 AB 就是一段轨线。同此法，得到 A、B、C、D…诸点，连成曲线，即为从 A 点出发的一条相轨迹。同理可作出其它各条相轨线。值得注意的是，按此法作图，会有积累误差。减小误差的途径是缩小 c 的取值 c_1，c_2，…之间的间隔，即取更多的等倾线。

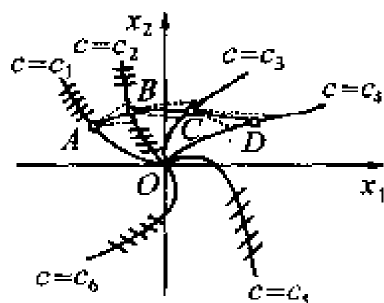


图4-2 等倾线法作自治系统相轨迹图

将相平面的概念加以推广，可以建立表示任一 k 个自由度非线性系统运动的相空间的概念。

4.2.2 奇点分析

设单自由度自治系统的运动微分方程为

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2);\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) \tag{4-17}$$

式中：f_1 和 f_2 为变量 x_1、x_2 的非线性函数，都有一阶偏导数。相平面中满足 $f_1(x_1,x_2)=f_2(x_1,x_2)=0$ 的点为相轨迹的奇点。在奇点上，所有状态变量的变化率 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$ 均为零，状态变量不会发生改变，这样系统只能静止在原来的位置上，因此，奇点的物理意义即系统的平衡状态，奇点也可以称为系统的平衡点。如果一个奇点的邻域中不存在其它的奇点，这样的奇点称为孤立奇点。在这里，我们只研究孤立奇点。根据式(4－17)可得

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)} \tag{4-18}$$

上式给出了相平面上除奇点外的相轨迹上各点切线的斜率，即方向场。在奇点处，由于同时存在有 $f_1(x_1,x_2)=f_2(x_1,x_2)=0$，因此，在经过平衡位置时其积分曲线切线的斜率具有不定值。因此，在相平面上，除了孤立奇点外不存在有任意两条积分曲线相交的点。

相平面上孤立奇点的位置可以由下列方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) = 0 \\ f_2(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \tag{4-19}$$

求得。由于函数 f_1 和 f_2 是非线性的，故式(4－19)中可能存在多个孤立奇点。下面我们只研究奇点为相平面原点时系统的运动性质。这样处理问题并不妨碍问题的普遍性，因为通过坐标变换就可以把其它位置的奇点平移到原点来。

设式(4－17)的奇点在原点 $x_1=x_2=0$ 处，将函数 f_1 和 f_2 在原点附近展成泰勒级数

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \varepsilon_1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2(x_1,x_2) \end{cases} \tag{4-20}$$

式中

$$a_{jk} = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right|_{x_1 = x_2 = 0} \qquad (j,k = 1,2) \tag{4-21}$$

ε_1、ε_2 是二阶以上的微量，若略去这些高阶微量，并采用矩阵记法

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \qquad [a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{4-22}$$

则得到线性化后的方程为

$$\{\dot{x}\} = [a]\{x\} \tag{4-23}$$

此式在奇点附件近似地成立，式中$[a]$称为系统的雅可比(Jacobi)矩阵。

为了求式(4-23)的解，采用变换

$$\{x\} = [b]\{u\} \tag{4-24}$$

式中：$[b]$为一非奇异常数矩阵(即$|b| \neq 0$)。将式(4-24)代入式(4-23)，两端乘以逆矩阵$[b]^{-1}$，则得

$$\{\dot{u}\} = [c]\{u\} \tag{4-25}$$

其中

$$[c] = [b]^{-1}[a][b] \tag{4-26}$$

上式为矩阵的相似变换。即$[c]$和$[a]$是相似的，它们具有相同的特征值。若能找出一个矩阵$[b]$通过相似变换式(4-26)，使矩阵$[c]$成为一个对角阵$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，这样就可以使式(4-25)变成最简形式。对角阵的元素分别为矩阵$[a]$的两个特性值λ_1和λ_2。

下面根据特征值λ_1和λ_2的各种不同情况，讨论系统在奇点附近相轨迹的分布规律，并由此决定奇点的类型。

(1) λ_1、λ_2是相异实数，此时

$$[c] = [b]^{-1}[a][b] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{4-27}$$

则式(4－27)的解为

$$u_1 = u_{10}e^{\lambda_1 t};\ u_2 = u_{20}e^{\lambda_2 t} \tag{4－28}$$

式中：u_{10}、u_{20}分别是 u_1、u_2 的初始值。

若 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$，则系统在原点 $u_1 = u_2 = 0$ 附近的相图如图 4－3(a)所示，这种奇点称为结点。由该图可知，从原点附近任意点出发的轨线都单调地趋向于原点，因此该结点在李雅普诺夫(Lyapunov)意义下是渐近稳定的。

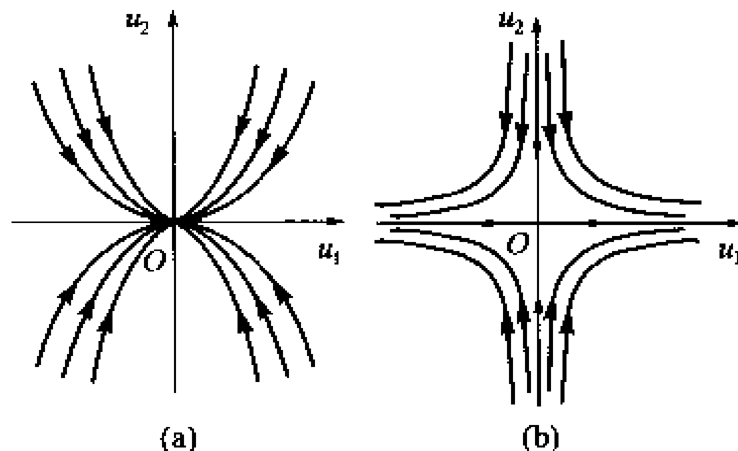


图 4－3　稳定结点与鞍点

若 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$，则原点附近轨线的形状仍与图 4－3(a)相同，但表示运动方向的轨线上的箭头的方向反向。即从原点附近任意点出发的轨线都单调地离开原点，这样的结点叫不稳定结点。

若 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$，则原点附近的相图如图 4－3(b)所示，这样的奇点称为鞍点，鞍点总是不稳定的。

(2) λ_1、λ_2 是相等的实数，此时[c]有两种形式，即

$$[c] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \tag{4－29}$$

或

$$[c] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \tag{4－30}$$

对于式(4－29)所表示的情况,式(4－25)的解为

$$u_1 = u_{10}e^{\lambda_1 t};\ u_2 = u_{20}e^{\lambda_1 t} \tag{4－31}$$

此时,原点仍为节点,但相轨迹成为过原点的直线,这种节点称为临界节点。且当 $\lambda_1<0$ 时,为稳定节点;而当 $\lambda_1>0$ 时,得到不稳定节点。

对于式(4－30)所表示的情况,将得到一种退化的节点,此时原点附近的轨线为曲线,仍然是 $\lambda_1<0$ 时稳定,而 $\lambda_1>0$ 时不稳定。由于这种情况很少见到,此处不作详细讨论。

(3) λ_1、λ_2 是共轭复数,此时令

$$\begin{cases}\lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta\end{cases} \tag{4－32}$$

式中:α、β 为实数。则式(4－25)的解为

$$u_1 = (u_{10}e^{\alpha t})e^{i\beta t};\ u_2 = (u_{20}e^{\alpha t})e^{-i\beta t} \tag{4－33}$$

再作线性变换

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_{20} & u_{10} \\ iu_{20} & iu_{10} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{4－34}$$

得

$$v_1 = (u_0e^{\alpha t})\sin\beta t;\ v_2 = (u_0e^{\alpha t})\cos\beta t \tag{4－35}$$

式中:$u_0 = u_{10}u_{20}$。

上式说明,此时原点附近的相图在(v_1,v_2)平面上是一条对数螺线,如图 4－4(a)所示。式中 β 的符号确定螺旋线的旋向:$\beta>0$,为逆时针向;$\beta<0$,为顺时针向。α 的符号则决定是向内旋还是向外旋,亦即决定奇点(即原点)的稳定性:$\alpha<0$,向内旋,原点是渐近稳定的奇点;$\alpha>0$,向外旋,原点是不稳定的奇点。

图 4－4(a)所示的情况为 $\alpha<0$,$\beta>0$。这种类型的奇点称为螺旋极点或焦点。当奇点为焦点时,其附近的轨线以衰减振荡的形式趋向奇点,或以增幅振荡的形式远离奇点。

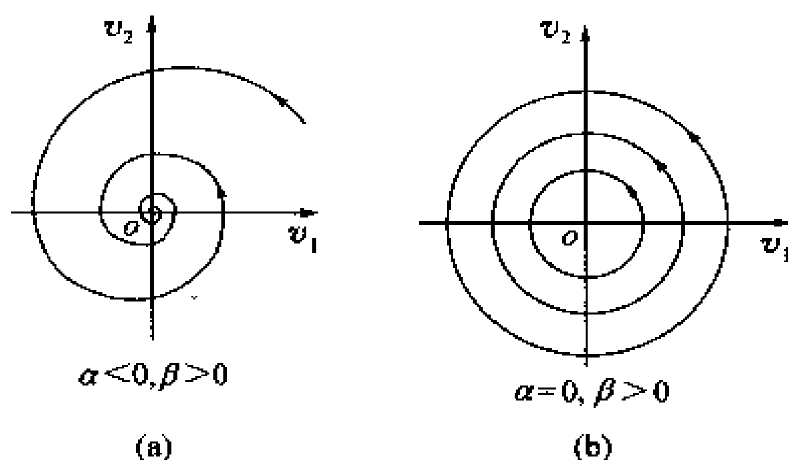


图 4－4　稳定焦点与中心

当 $\alpha=0$ 时，原系统作简谐振荡，轨线成为图 4－4(b)所示的同心圆。这种奇点称中心，是仅稳定的。

以上是按矩阵[a]的特征分析来判断奇点性质。实际上基于以上的分析和讨论，我们也可以直接按[a]的元素来判断奇点的类型。记

$$\mathrm{tr}[a] = a_{11} + a_{22} = p, \quad \det[a] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = q$$

则矩阵[a]的特征方程为

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \tag{4-36}$$

由上式得特征值为

$$\lambda_{1,2} = (p \pm \sqrt{\Delta})/2 \tag{4-37}$$

式中：$\Delta = p^2 - 4q$。因此，p、Δ 这两个参数完全决定了特征值 λ_1、λ_2，从而完全决定了奇点的性质。可以归纳出如下结论

$$\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \begin{cases} q > 0(\text{结点}) \begin{cases} p \leqslant 0(\text{稳定}) \\ p > 0(\text{不稳定}) \end{cases} \\ q < 0(\text{鞍点}) \end{cases} \\ \Delta < 0 \begin{cases} p \neq 0(\text{焦点}) \begin{cases} p \leqslant 0(\text{稳定}) \\ p > 0(\text{不稳定}) \end{cases} \\ p = 0(\text{中心}) \end{cases} \end{cases}$$

利用此分类准则在(p,q)参数平面内可划分出不同类型的奇点，如图4－5所示。$[a]$的特征值实部不为零时，称相应的奇点为双曲奇点；特征值实部为零时，称相应的奇点为非双曲奇点。

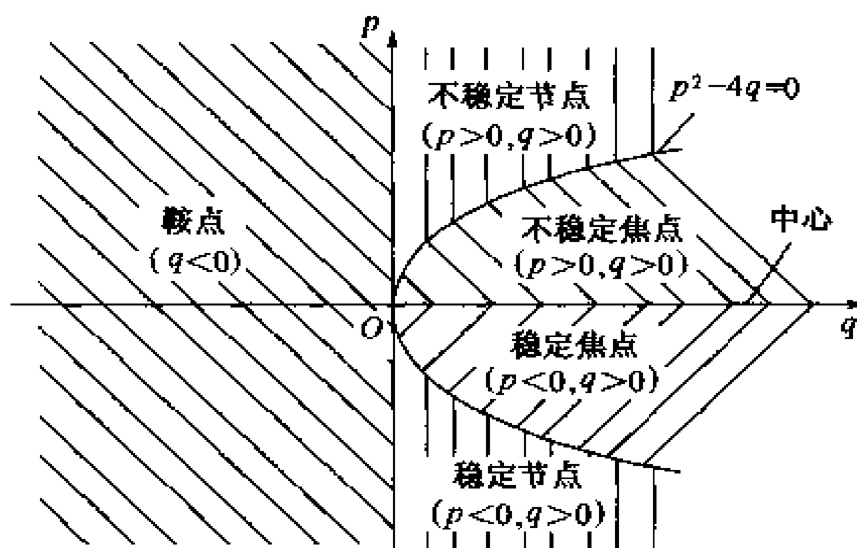


图4－5　参数平面内的奇点类型

需要特别注意的是，以上得到的所有结论都是对经过线性化的近似系统而言的，但是除了中心的情况外，其余所有情况下的结论都适用于原来的非线性系统。对于线性化后其奇点成为中心的情况，原来的非线性系统可能对应的是一稳定焦点，也可能是不稳定焦点，也可能仍为中心，究竟是哪一类型取决于线性化时所略去的高次项的作用，即此时原非线性系统奇点的稳定性仅由线性分析是无法判断的。

还有一点需特别注意的是：一个非线性系统可能有多个奇点，每个奇点的稳定性可能是不相同的，因此我们讲非线性系统奇点的稳定性，是指其中某一个奇点的稳定性，是一个局部性的概念，不是指所有奇点的稳定性，即不是一个全局性的概念。也就是说我们讨论的不是整个非线性系统的稳定性。对于线性系统来说，由于全系统只有一个奇点，因此奇点的稳定性就是系统的稳定性。

奇点的稳定性，由雅克比矩阵$[a]$的特征值决定。若系统中有一个可变参数μ，当μ变化时，$[a]$的特征值有可能也会发生变化，例如其实部由正向负变化，这时奇点的数目和（或）类型便会

改变，即系统的拓扑结构发生改变，这种现象叫做分岔，此时参数 μ 称为临界值或分岔值。分岔有静态分岔和动态分岔之分。静态分岔是指系统奇点的数目和稳定性发生变化的分岔问题，上面所说的这种分岔即属于静态分岔。动态分岔是指静态分岔以外的其它分岔问题，如霍普夫分岔、闭轨分岔、环面分岔、同宿或异宿分岔等[3-7]。分岔研究是非线性动力学的重要组成部分，因其需要较多的数学准备知识，故本章将不涉及这方面的内容。

4.2.3 单自由度保守系统的定性分析

上一小节讨论了系统在奇点附近的性态，下面进一步讨论系统在大范围内的运动。这里只研究单自由度保守系统的运动[8,9]。保守系统运动微分方程的一般形式为

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{4-38}$$

记 $x = x_1$，$\dot{x} = x_2$，则对应的相轨迹的微分方程为

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f(x_1)}{x_2} \tag{4-39}$$

对上式分离变量并积分，得

$$\frac{1}{2}x_2^2 + U(x_1) = E \tag{4-40}$$

式中：$\frac{1}{2}x_2^2$ 为单位质量质点的动能；$U(x_1) = \int_0^{x_1} f(\xi)\,d\xi$ 为该质点的势能；E 为积分常数，由初始条件确定，它代表该质点的总机械能。显然，式(4-40)就是保守系统能量守恒定律的表述，(x_1, x_2)就是单自由度系统的相平面，如果将 E 作为垂直于该相平面的第三变量。则式(4-40)表示的是一个空间曲面，如图4-6(a)所示。

图4-6(b)是空间曲面在 Eox_1 平面中的截形，此时有 $x_2 = 0$，即此截形的方程为 $E = U(x_1)$。若将 U 看作是单位重量的重力势能，即高度 h，那么该图可以形象地看作是一条无摩擦的滚道，一小球沿该滚道滚动，E 代表小球起点的高度，而 x_2 代表小球滚动的速度 v。

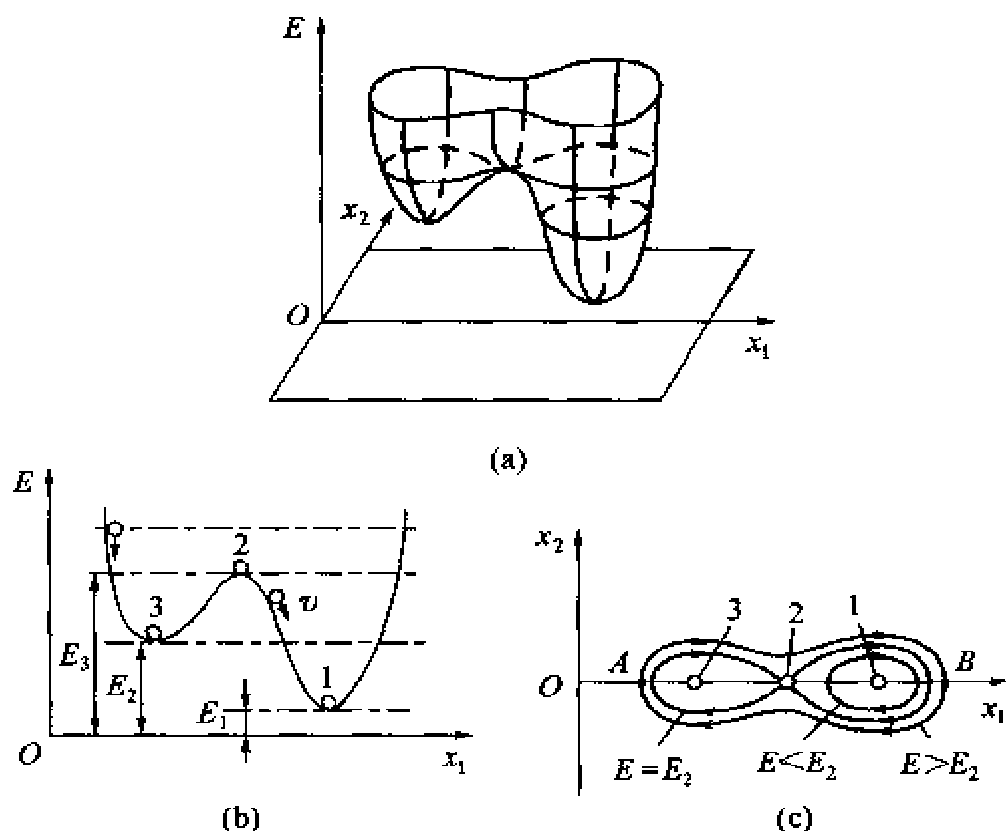


图 4－6　保守系统势能曲线和相轨迹

图 4－6(c)是空间曲面(a)在水平截面上的截形，即等高线。不同的等高线对应着具有不同总机械能 E 的系统在相平面内的轨线。相平面上的一定点，只对应于曲面一定的高度。由于曲面是单叶的，面面一般只有一条轨线通过它。由此可以看出：对于保守系统来说，轨线不相交其实就是“等高线”不相交(个别点除外)的体现。当系统在一条轨线上运行时，其机械能守恒，与外界无能量交换。而当从一条轨线跳到另一条轨线时，则有能量的释放或吸收，这就不称其为保守系统了。

图 4－6(c)中标有 1、2、3 的三个奇点，其对应的能量分别为 E_1、E_2 和 E_3。其中奇点 1 与 3 为中心，奇点 2 为鞍点，它们分别与系统势能的极小值与极其大值相对应，如图 4－6(b)所示；中心为稳定的，鞍点是不稳定的。由图 4－6(c)还可看出，对于保守系统来说，其奇点不可能是结点或焦点，因此不存在渐近稳定的情况，这是由于系统中不存在能量耗散机制。

当 $E < E_2$ 时，系统在围绕奇点 1 或 3 的封闭轨线上运行，其轨线只包含一个中心；当 $E > E_3$ 时，系统在围绕奇点 1、2 和 3 的轨线上运行，即轨线包含两个中心和一个鞍点。一般来说，轨线包含 $2j+1$ 个奇点，其中有 j 个鞍点，$j+1$ 个中心。$E = E_2$ 的一条轨线将以上两种情况分开，称为分界线。

4.2.4 极限环

由前面的讨论可知，保守系统存在封闭轨线，封闭轨线对应于系统的一种周期运动。当系统在这一条轨线上运动时，总的机械能是守恒的，这是一种由初始条件确定的周期运动。

对于自激振动系统，因其内部存在某种能量的输入与耗散机制，所以也有可能存在封闭轨线，这种封闭轨线也代表一种周期运动[10]。但自激振动系统的封闭轨线与保守系统的封闭轨线是有差异的：

① 自激振动系统在某一封闭轨线上运动时，其总机械能并不守恒，它既吸收能量，又耗散能量，总机械能在不断变化，但在一个周期内，总能量的收支是平衡的。经过一个周期后，系统的状态变量返回原状。

② 自激振动系统的封闭轨线可以具有某种吸引力，它可以把从该轨线附近的其它点出发的轨线吸引到该封闭轨线上来，如图 4－7(a)、(b) 中以粗实线表示的封闭轨线就具有这种性质。因此，自激振动系统的封闭轨线代表一种与初始条件无关的周期运

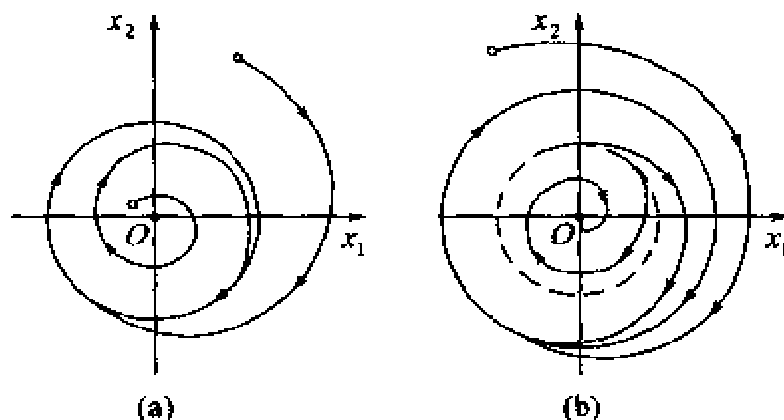


图 4－7 稳定极限环与不稳定极限环

动。这种周期运动是由系统本身决定的，初始条件的变化（如图4-7(a)），或者初始条件在一定范围内的变化（如图4-7(b)），并不影响系统最后趋近于这种周期运动。实际上这是由于自激振动系统中与阻尼有关的参数在运动过程中的变化所导致的结果。这与保守系统的封闭轨线代表对应于某一初始条件的周期运动这一性质形成鲜明的对照。

具有以上特性的自激振动系统的封闭轨线称为极限环。因此，除了要研究自激振动系统在常数解即奇点附近的动态特性外，还要研究其在周期解即封闭轨线附近的动态特性。

系统的奇点分为稳定的和不稳定的，同理，非线性系统的极限环也分为稳定的和不稳定的两种。图4-7(a)、(b)中以粗实线表示的极限环是稳定的，而图4-7(b)中以虚线表示的极限环是不稳定的。

下面以范德波尔振子为例说明极限环的基本特征[11]。

范德波尔振子是一个典型的自激振动系统，其运动方程为

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0 \quad (\varepsilon>0) \qquad (4-41)$$

此方程的阻尼系数 $c=\varepsilon(x^2-1)$ 是变化的：当 $|x|<1$ 时，$c<0$，阻尼是负的，促使振幅上升；当 $|x|>1$ 时，$c>0$，阻尼是正的，振幅会下降。因此该系统有可能存在极限环。图4-8(a)、(b)分别

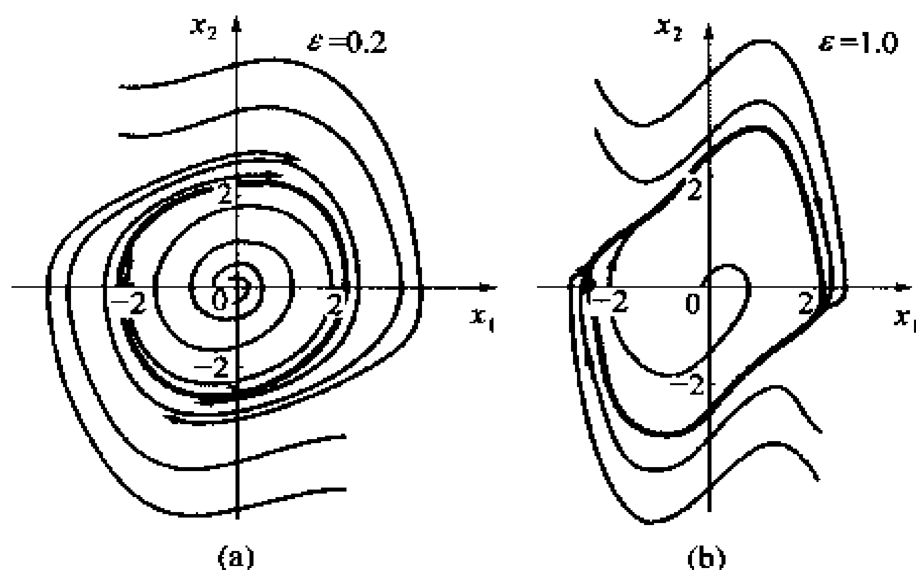


图4-8　范德波尔方程的极限环

给出了 $\varepsilon=0.2$ 及 $\varepsilon=1$ 两种情况下的相图。从图上可以看出，从相平面上任意点出发的轨线都收敛于极限环。可以证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，极限环趋近于圆周；当 $\varepsilon<0$ 时，极限环是不稳定的。

式(4-41)的雅可比矩阵在原点处的特征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{\varepsilon}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2-1} \tag{4-42}$$

由此可以看出，当 $\varepsilon>0$ 时，原点是不稳定的奇点，因此从原点附近出发的轨线是发散的，但由于稳定极限环的存在，限制了轨线的无限发散。而当 $\varepsilon<0$，原点是稳定的，从原点附近任一点出发的轨线应收敛于原点，但也是由于有了极限环的存在，使得收敛需要限定一个范围：只有在该极限环内部的轨线才能收敛于原点。

4.3 非线性振动的定量分析方法

上一节中叙述的定性方法在讨论振动系统的运动性态时，可以避免对动力学微分方程求解，但定性分析方法的主要研究对象限于自治系统，而且不能定量地计算运动的时间历程以及频率、振幅等表示振动特性的基本参数。本节对非线性系统的定量分析方法进行讨论。由于可求出精确解析解的非线性系统极少，因此这里讨论的定量分析方法均为近似解法，这些方法的研究对象多为弱非线性系统，即非线性项为小量的系统。

4.3.1 林滋泰德－庞开莱方法

林滋泰德－庞开莱方法(Lindstedt－Poincaré 方法，简称 L－P 法)是摄动法中的一种。振动法[12]又称小参数法，它处理含小参数 ε 的系统。一般当 $\varepsilon=0$ 时，可求得相应线性系统的解 x_0，当 $\varepsilon\neq 0$但很小时，可以把原系统的解展成 ε 的幂级数 $x=x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots$若这个级数当 $\varepsilon\to 0$ 时一致收敛，则称正则摄动，否则称为奇异摄动。振动法的种类繁多，L－P 法是其中最基本的方法

之一[6]。

考虑含小参数 ε 的非线性振动系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \tag{4-43}$$

为分析问题方便起见，作变量代换，即令

$$\tau = \omega t \tag{4-44}$$

将 ω 和 x 展开为小参数 ε 的幂级数

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots \tag{4-45}$$

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \cdots \tag{4-46}$$

式中：$x(\tau)$ 为周期函数；$\omega_j(j=1, 2, \cdots)$ 为待定系数。若用 x' 表示 x 对 τ 的导数，则有 $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \omega x'$，$\ddot{x} = \omega^2 x''$。利用变换关系式(4-44)及以上 ω 和 x 的展开式，代人式(4-43)后，比较同次幂系数，可得 $x_j(\tau)$ 所满足的各阶方程

$$\begin{cases} \varepsilon^0: \omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \\ \varepsilon^1: \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = f_0 - 2\omega_0\omega_1 x_0'' \\ \varepsilon^2: \omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 = x_1\dfrac{\partial f_0}{\partial x} + x_1'\dfrac{\partial f_0}{\partial x'} + \omega_1\dfrac{\partial f_0}{\partial \omega} - \\ \qquad\qquad (2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)x_0'' - 2\omega_0\omega_1 x_1'' \cdots \\ \qquad \vdots \end{cases} \tag{4-47}$$

上列方程组中，$f_0, \dfrac{\partial f_0}{\partial x}, \cdots$ 等为函数 f 及其导数在原点 (x_0, x_0') 的取值。以上方程可以逐步求解。先由式(4-47)的第 1 式求出 x_0，将其代人第 2 式便可求出 x_1，再将 x_0、x_1 代人第 3 式，便可求出 $x_2 \cdots$ 直至将所需要的各项求出。

由于 $x(\tau)$ 是 τ 的周期函数（周期为 2π），因此所有的 $x_j(j=0,1,2,\cdots)$ 等也应是 τ 的周期为 2π 的周期函数，即有

$$x_j(\tau+2\pi) = x_j(\tau) \qquad (j = 0,1,2,\cdots)$$

这一附加条件可以决定各阶频率修正值 ω_j,即可适当选择 ω_j,从而消除永年项得到周期解。永年项是指仅根据式(4-47)求解 x_j 时,其表达式中会出现包含因子 $t^m\sin\phi$ 的一些项,永年项的存在使得 x_j 随着 t 的增加而无界地增长,所以必须修正。

在第4.5节分析参数激励振动系统时,将要用到L-P法。

4.3.2 平均法

仍然考虑含小参数 ε 的非线性振动系统式(4-43)。当 $\varepsilon=0$ 时,式(4-43)退化为线性系统,其解为

$$x = a\cos\psi;\ \psi = \omega_0 t + \varphi \tag{4-48}$$

式中:a 和 φ 均为常数。当 $\varepsilon\neq0$,但 $\varepsilon\ll1$ 时,非线性项的存在必然对式(4-48)表示的解有影响,这种影响体现在使式(4-48)中的常数 a 和 φ 变成时间 t 的函数 $a(t)$、$\varphi(t)$,即此时解为

$$x = a\cos\psi(t);\ \psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) \tag{4-49}$$

于是,需确定的时间函数共有三个,即 $x(t)$、$a(t)$ 和 $\varphi(t)$,而限制它们的只有式(4-43)、式(4-49)两个方程。从数学上看,还需补充一个方程才能完全确定这三个时间函数。为了寻求一个补充方程,对式(4-49)求导,得

$$\dot{x} = \dot{a}\cos\psi - \omega_0 a\sin\psi - a\dot{\varphi}\sin\psi \tag{4-50}$$

若近似地取非线性振动速度具有线性系统的速度形式,即

$$\dot{x} = -\omega_0 a\sin\psi \tag{4-51}$$

则由式(4-50)可得到补充方程

$$\dot{a}\cos\psi - a\dot{\varphi}\sin\psi = 0 \tag{4-52}$$

将 x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ 代入式(4-43),得

$$\omega_0\dot{a}\sin\psi + \omega_0 a\dot{\varphi}\cos\psi = -\varepsilon f(a\cos\psi,\ -\omega_0 a\sin\psi) \tag{4-53}$$

联立式(4-53)和式(4-52),可解得

$$\begin{cases} \dot{a} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega_0}\sin\psi f(a\cos\psi,\ -\omega_0 a\sin\psi) \\ \dot{\varphi} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega_0 a}\cos\psi f(a\cos\psi,\ -\omega_0 a\sin\psi) \end{cases} \tag{4-54}$$

由于式(4－54)右端函数是 ψ 的周期函数，可将其展开成 Fourier 级数；又由于当 ε 充分小时，$a(t)$ 和 $\varphi(t)$ 均缓慢变化，所以在第一次近似时可略去级数展开式中的谐波项，仅取常数项。于是得到第一次近似的求解方程

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}\sin\psi f(a\cos\psi,\ -\omega_0\sin\psi)\,\mathrm{d}\psi$$

$$\begin{cases} \dot{a} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\psi f(a\cos\psi,\ -\omega_0\sin\psi)\,\mathrm{d}\psi \\ \dot{\psi} = \omega_0 - \dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\psi f(a\cos\psi,\ -\omega_0 a\sin\psi)\,\mathrm{d}\psi \end{cases} \tag{4-55}$$

注意到其中第二个式子已经用到式(4－49)，由 $\dot{\varphi}$ 换为了 $\dot{\psi}$。式(4－55)右端的积分项就是式(4－54)右端函数在一个周期 $T=2\pi$ 内对时间的平均值。由于 a、φ 在时间为一个周期的量级内变化很小，所以计算右端平均值时可看作常量。因此，易由上式积分求出 $a(t)$ 和 $\psi(t)$。

上述简化方法即为平均法。它的物理本质是：在每一个运动周期中，认为运动是简谐振动，但第二个周期的振幅和初相角与第一个周期相比，已经发生了微小的改变。平均化方程式(4－55)可以形象地认为是计算振动过程的包络线方程，如图 4－9 所示[13]。

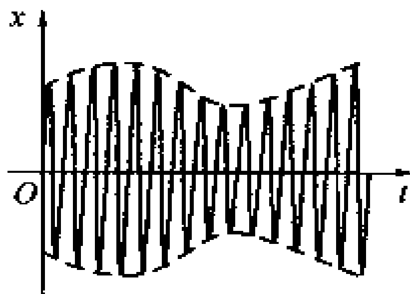


图 4－9　振动过程的平均化

4.3.3 多尺度法

上面叙述的平均法是利用两种不同的时间尺度，将系统的振动分为快变和慢变两种过程。将标志运动的主要参数，如振幅和相位，在快变过程的每个周期内进行平均，然后着重讨论其慢变过程。为了提高平均法的计算精度，可以将时间尺度划分得更为精细，由此发展为多尺度法。与摄动法相比，多尺度法的明显优点是不仅能计算周期运动，而且能计算耗散系统的衰减振动；不仅能计算稳态响应，而且能计算非稳态过程；也可以分析稳态响应的稳定性，描绘非自治系统的全局运动性态。

引入表示不同尺度的时间变量

$$T_n = \varepsilon^n t \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{4-56}$$

则非线性系统的运动过程为不同尺度时间变量的函数，可写为

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{m} \varepsilon^n x_n \qquad (T_0, T_1, T_2, \cdots, T_m) \tag{4-57}$$

式中：m 为小参数的最高阶次，取决于计算的精度要求。将不同尺度的时间变量视为独立变量，则 $x(t,\varepsilon)$ 成为 m 个独立时间变量的函数，对时间的微分可利用复合函数微分公式按 ε 的幂次展开，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots + \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial T_m} = \\ &D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots + \varepsilon^m D_m\end{aligned} \tag{4-58}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots + \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial T_m}\right) = \\ &D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \cdots\end{aligned} \tag{4-59}$$

式中：$D_n(n=0,1,2,\cdots,m)$为偏微分算子符号，定义为

$$D_n \equiv \frac{\partial}{\partial T_n} \qquad (n = 0,1,2,\cdots,m) \tag{4-60}$$

将运动微分方程中的微分运算以式(4-58)和式(4-59)代入，变

量 x 也按式(4－57)展开，代入运动微分方程，比较同次幂系数，就得到各阶近似的线性偏微分方程组。在依次求解过程中，利用消除永年项的附加条件和初始条件，可以导出各阶近似解的确定表达式。

下一节将利用多尺度法分析单自由度系统的强迫振动。

4.4 单自由度系统的强迫振动

由 4.1 节可知，根据激励的不同，非自治系统可以分为强迫振动系统和参数激励系统。本节主要讨论周期激励下的单自由度强迫振动系统[9,12,14]，参数激励系统将在下一节中进行讨论。

考虑具有小黏性阻尼的单自由度强迫振动系统，其运动微分方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\varepsilon\mu\dot{x} - \varepsilon\alpha x^3 + K\cos\Omega t \qquad (4-61)$$

4.4.1 主共振

引进一个解谐参数 σ 以代替原来的参数——激励频率 Ω，这个 σ 是 Ω 和 ω_0 接近程度的定量描述。因此有

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \qquad (4-62)$$

根据线性无阻尼理论，当 $\sigma = 0$ 时，不论激励是多么微小，都将引起无界的振动。在实际系统中，由于阻尼和非线性的存在，使得这种大的振动受到限制。因此为了得到这个问题的一致有效近似解，需要指定激励的阶数，使得在求解一阶近似解的微分方程中不出现激励项，而当阻尼和非线性出现时它才出现。为了实现这一点，设

$$K = \varepsilon k \qquad (4-63)$$

可以用 4.3 节中介绍的各种方法得出该问题的近似解，这里我们采用多尺度法进行求解。把解用不同时间尺度表示为

$$x(t,\varepsilon) = x_0(T_0,T_1) + \varepsilon x_1(T_0,T_1) + \cdots \qquad (4-64)$$

式中：$T_0=t, T_1=\varepsilon t$。把激励也用 T_0 和 T_1 表示为 $\varepsilon k\cos(\omega_0 T_0+\sigma T_1)$，将该式和式(4－64)代入式(4－61)中，并令两端 ε^0 和 ε 的系数相等，得

$$D_0^2 x_0+\omega_0^2 x_0=0 \tag{4-65}$$

$$D_0^2 x_1+\omega_0^2 x_1=-2D_0 D_1 x_0-2\mu D_0 x_0-\alpha x_0^3+k\cos(\omega_0 T_0+\sigma T_1) \tag{4-66}$$

式(4－65)的通解可以写为

$$x_0=A(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 T_0}+\bar{A}(T_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 T_0} \tag{4-67}$$

式中 $A(T_1)$ 暂时还是未确定的函数，它将通过消去 x_1 中的永年项而确定下来。把 x_0 代入式(4－66)中，并把 $\cos(\omega_0 T_0+\sigma T_1)$ 用复数形式表示，有

$$D_0^2 x_1+\omega_0^2 x_1=-\left[\mathrm{i}2\omega_0(D_1 A+\mu A)+3\alpha A^2\bar{A}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 T_0}-\alpha A^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega_0 T_0}+\frac{1}{2}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 T_0+\sigma T_1)}+cc \tag{4-68}$$

式中 cc 代表前面各项的共轭复数。为了使上式解中不出现永年项，必须有

$$2\mathrm{i}\omega_0(D_1 A+\mu A)+3\alpha A^2\bar{A}-\frac{1}{2}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}=0 \tag{4-69}$$

将 A 表示成复数形式，即令

$$A=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \tag{4-70}$$

式中 a 和 β 都是实数。注意到 $\dot{A}=D_0 A+\varepsilon D_1 A$，且有 $D_0 A=0$，将式(4－70)代入式(4－69)，可以得到

$$\begin{cases}\dot{a}=-\mu\varepsilon a+\dfrac{1}{2}\varepsilon\dfrac{k}{\omega_0}\sin(\sigma T_1-\beta)\\[2ex] a\dot{\beta}=\dfrac{3}{8}\varepsilon\dfrac{\alpha}{\omega_0}a^3-\dfrac{1}{2}\varepsilon\dfrac{k}{\omega_0}\cos(\sigma T_1-\beta)\end{cases} \tag{4-71}$$

由此可以求出式(4－61)的一次近似解

$$x = a\cos(\omega_0 t + \beta) \tag{4－72}$$

式中 a 和 β 由式(4－71)给出。式(4－71)可以变换为一个自治系统(即不显含 T_1)的形式,为此,令

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \tag{4－73}$$

可得

$$\begin{cases} \dot{a} = -\mu\varepsilon a + \dfrac{1}{2}\varepsilon\dfrac{k}{\omega_0}\sin\gamma \\ a\dot{\gamma} = \sigma\varepsilon a - \dfrac{3}{8}\varepsilon\dfrac{\alpha}{\omega_0}a^3 + \dfrac{1}{2}\varepsilon\dfrac{k}{\omega_0}\cos\gamma \end{cases} \tag{4－74}$$

对应系统的定常运动($\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$)的常数解,应满足方程

$$\begin{cases} \mu a = \dfrac{1}{2}\dfrac{k}{\omega_0}\sin\gamma \\ \sigma a - \dfrac{3}{8}\dfrac{\alpha}{\omega_0}a^3 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{\omega_0}\cos\gamma \end{cases} \tag{4－75}$$

由上式可以得到

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8}\frac{\alpha}{\omega_0}a^2\right)^2\right]a^2 = \frac{k^2}{4\omega_0^2} \tag{4－76}$$

$$\tan\gamma = \frac{8\mu\omega_0}{3\alpha a^2 - 8\sigma\omega_0} \tag{4－77}$$

因此,定常解的一次近似为

$$x = a\cos(\omega_0 t + \beta) = a\cos(\Omega t - \varepsilon\sigma t + \beta) = a\cos(\Omega t - \gamma) \tag{4－78}$$

可见,主共振情况下,定常振动的频率与激励频率精确地相同,而响应的相位与激励的相位存在相位差。

式(4－76)是响应振幅 a 作为依赖于解谐参数 σ(即依赖于激励频率)和激励幅值 k 的隐函数方程,称为频率响应函数。对于

给定的μ和k值，所画的a作为σ的函数的曲线称为频率响应曲线。

图4－10将线性($\alpha=0$)响应曲线和非线性($\alpha\neq0$)响应曲线作了比较。由该图可以看出，非线性的作用是将振幅曲线弯曲，并且扭曲了相位曲线。在非线性系统的两幅图上都形成了多值区域，后面将讨论这种多值性将引起跳跃现象。图上的箭头指出了这种跳跃。

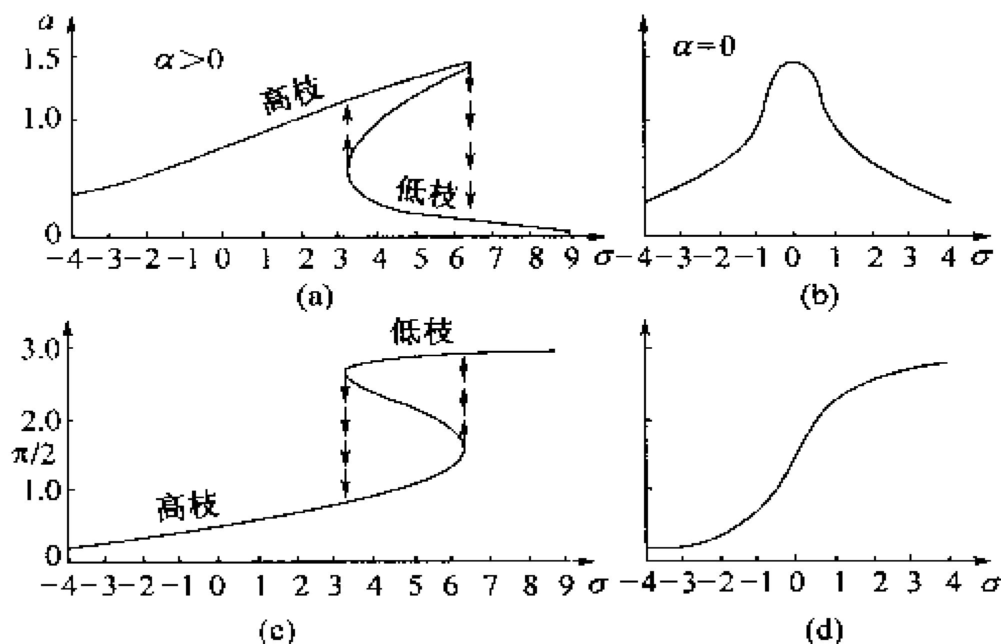


图4－10　线性响应曲线和非线性响应曲线的比较

(a),(b)振幅；(c),(d) 相位。

非线性性质使线性频率响应曲线($\alpha=0$)产生弯曲，对于硬弹簧(即$\alpha>0$)弯向右侧，对于软弹簧(即$\alpha<0$)弯向左侧，如图4－11(a)所示。图4－11(b)为硬弹簧的频率响应曲线随激励幅值的变化。当激励幅值增加时，频率响应曲线越来越弯离$\sigma=0$轴。振幅峰值的轨迹是抛物线$\sigma=\dfrac{3\alpha}{8\omega_0}a^2$的上半支，此抛物线在图4－11(b)上用虚线画出，它常被称为骨架曲线。应该注意到，频率响应曲线有些是多值的而另一些则是单值的，这与k值有关。

跳跃现象　我们知道，对于线性系统的强迫振动来说，激励频率的连续变化，只会导致响应幅值的连续变化。而对于非线性系

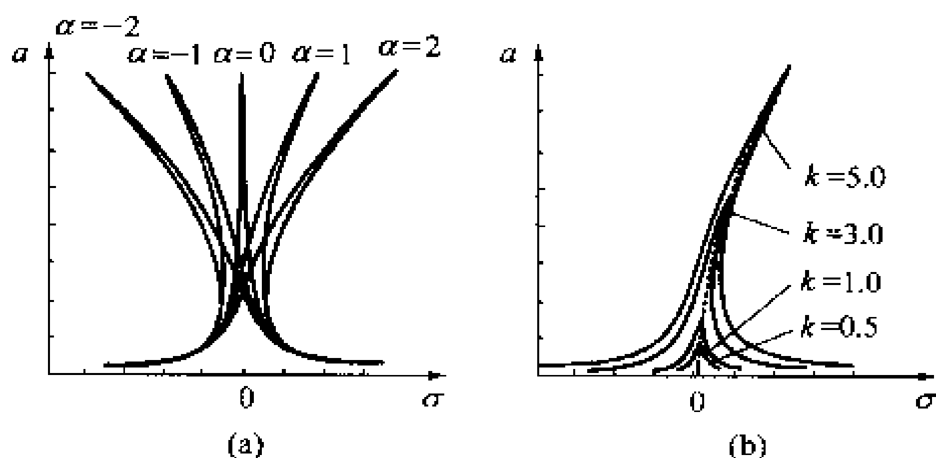


图 4－11　杜芬方程主共振的频率响应曲线

（a）非线性的影响；（b）激励幅值的影响。

统来说，即使激励频率进行连续扫描，在某些特定点上，也会导致振幅突然变化。例如，在图 4－12 中，当激励频率连续上升时，响应幅值将沿曲线段 $FB'D''C'$ 上升，当增至 σ_2 所对应的频率，而振幅达到 C' 点时，如果频率再有极其微小的增加，则振幅会从 C' 点突然跌落到 C 点。反之，当激励频率从大到小连续变化时，振幅将沿曲线 $ECDB$ 移动。当达到 σ_1 所对应的频率时，振幅达到 B 点。这时，频率如再有微小的下降，则振幅将从 B 点突然跃升到 B' 点。这种现象称为“跳跃现象”，是非线性系统所特有的现象。

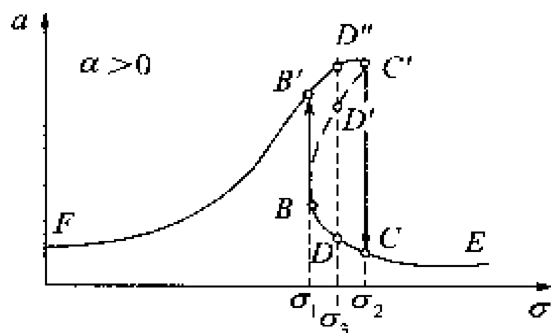


图 4－12　非线性系统的跳跃现象

在图 4－12 中，横坐标上的 σ_1 和 σ_2 两点之间，任一频率与振幅曲线上的三点对应，如 σ_3 所对应的振幅为 D、D' 和 D'' 三点。究竟哪一个振幅可以实现，需视激励频率变化的“历史”而定。当激励频率由小到大，增加到 σ_3 时，振幅将取 D'' 点的值；当激励频率

由大到小，下降到 σ_3 时，振幅将取 D 点的值。至于 D'点所对应的振幅，实际上是不可能实现的。因为它代表一种不稳定情况，任何一个无可避免的扰动，都会使振幅跳离 D'——不是上升到 D''点就是下降到 D 点。图中虚线线段 BC'上的所有的点都具有这种不稳定性，因此它们所对应的振幅在实验中都是不可能观察到的。

4.4.2 非共振硬激励

当 Ω 远离 ω_0 时，除非激励幅值是硬的，即除非 $K=O(1)$，否则激励的作用是小的。因此此时的运动微分方程即为式(4-61)。

如同主共振情形一样，利用多尺度方法来求近似解，将解表示为

$$x(t,\varepsilon)=x_0(T_0,T_1)+\varepsilon x_1(T_0,T_1)+\cdots \qquad (4-79)$$

的形式。将式(4-79)代入式(4-61)，并令等号两边 ε^0 和 ε 的系数相等，可得

$$D_0^2x_0+\omega_0^2x_0=K\cos\Omega T_0 \qquad (4-80)$$

$$D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=-2D_0D_1x_0-2\mu D_0x_0-\alpha x_0^3 \qquad (4-81)$$

式(4-80)的通解可以写成

$$x_0=A(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0T_0}+\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega T_0}+cc \qquad (4-82)$$

式中：$\Lambda=\frac{1}{2}K(\omega_0^2-\Omega^2)^{-1}$。将 x_0 代入式(4-81)得

$$\begin{aligned}D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=&-[2\mathrm{i}\omega_0(D_1A+\mu A)+6\alpha A\Lambda^2+3\alpha A^2\bar{A}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0T_0}-\\&\alpha[A^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega_0T_0}+\Lambda^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\Omega T_0}+3A^2\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\omega_0+\Omega)T_0}+\\&3\bar{A}^2\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega-2\omega_0)T_0}+3A\Lambda^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0+2\Omega)T_0}+\\&3A\Lambda^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0-2\Omega)T_0}-\Lambda(2\mathrm{i}\mu\Omega+3\alpha\Lambda^2+\\&6\alpha A\bar{A})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega T_0}+cc\end{aligned} \qquad (4-83)$$

除了正比于 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0T_0}$ 的一些项之外，只要存在次共振(即当 $\omega_0\approx(m\omega_0+n\Omega)$，而 m 和 n 是使 $|m|+|n|=3$ 的整数)时，也可能出

现永年项或接近永年项(小除数)的项。这发生在 $\Omega\approx\frac{1}{3}\omega_0$ 或 $\Omega\approx3\omega_0$。第一种情况称为超谐波共振,第二种情况称为次谐波共振。这两种情况将在下面进行讨论,这里仅讨论非共振的情况。

在非共振情形下,如果

$$2i\omega_0(D_1A+\mu A)+6\alpha\Lambda^2A+3\alpha A^2\overline{A}=0 \qquad (4-84)$$

则永年项消去。在式(4-84)中设 $A=\frac{1}{2}a\exp(i\beta)$(这里 a 和 β 是实数)并分离实部和虚部,可以得到

$$\dot{a}=-\mu\varepsilon a;\ \omega_0a\dot{\beta}=3\alpha\varepsilon\left(\Lambda^2+\frac{1}{8}a^2\right)a \qquad (4-85)$$

所以作为一次近似

$$x=a\cos(\omega_0t+\beta)+K(\omega_0^2-\Omega^2)^{-1}\cos\Omega t \qquad (4-86)$$

式中:a 和 β 由式(4-85)给出;a 的通解是 $a=a_0\exp(-\mu T_1)$,这里 a_0 是个常数。因面如同线性情形一样,自由振动解(齐次方程的解)随着时间增长面衰减,因而稳态响应仅由强迫振动解(特解)所构成。可是,尽管自由振动项的确在衰减,但它的频率却是特解的幅值的函数。

4.4.3 超谐波共振

在这种情形下,引入解谐参数 σ

$$3\Omega=\omega_0+\varepsilon\sigma \qquad (4-87)$$

来表示 Ω 和 $\frac{1}{3}\omega_0$ 的接近程度。根据式(4-83)消除永年项且设

$$\gamma=\sigma T_1-\beta \qquad (4-88)$$

可以得到

$$\begin{cases}\dot{a}=-\mu\varepsilon a-\dfrac{\alpha\varepsilon\Lambda^3}{\omega_0}\sin\gamma\\ a\dot{\gamma}=\left(\sigma-\dfrac{3\alpha\Lambda^2}{\omega_0}\right)\varepsilon a-\dfrac{3\alpha\varepsilon}{8\omega_0}a^3-\dfrac{\alpha\varepsilon\Lambda^3}{\omega_0}\cos\gamma\end{cases} \qquad (4-89)$$

所以一次近似解为

$$x = a\cos(3\Omega t - \gamma) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1}\cos\Omega t \quad (4-90)$$

式中：a 和 γ 由式(4－89)给出。稳态运动对应着 $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$，与主共振类似，可以得到频率响应方程

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - 3\frac{\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{3\alpha}{8\omega_0}a^2\right)^2\right]a^2 = \frac{\alpha^2\Lambda^6}{\omega_0^2} \quad (4-91)$$

由式(4－89)和式(4－90)可以看出，尽管存在着正阻尼，在 $\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$ 时的自由振动并不衰减到零，而且非线性性质调整了自由振动项的频率，使之精确地3陪于激励频率，从而响应成为周期的。因为所产生的自由振动项的频率3倍于激励频率，这种共振称为超谐波共振或泛音。

图4－13画出了各种频率响应曲线，这些曲线显示了 α、Λ 和 μ 变化时的影响。如同主共振情形一样，这里的频率响应曲线的弯曲也引起跳跃现象。当 α 改变正负号时，存在着关于 $\sigma = 0$ 直

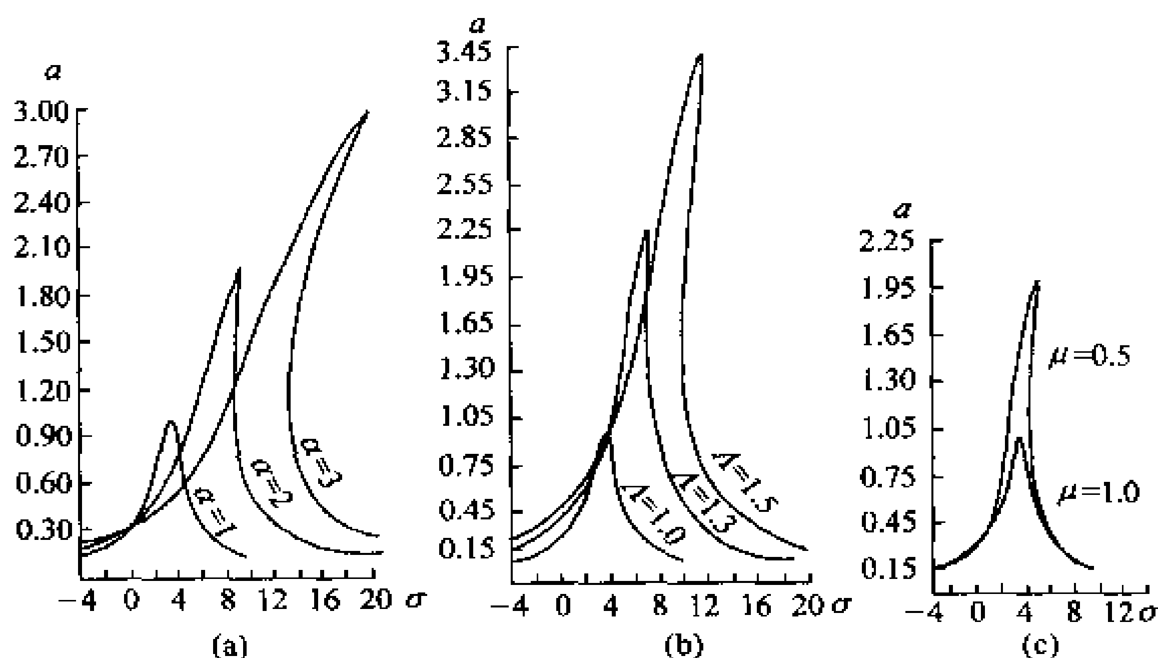


图4－13 杜芬方程超谐波频率响应曲线

(a) 非线性的影响；(b) 激励幅值的影响；

(c) 阻尼的影响。

线的对称性。

4.4.4 次谐波共振

为了分析次谐波共振，引入解谐参数

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \tag{4-92}$$

根据式(4-83)消除永年项且设

$$\gamma = \sigma T_1 - 3\beta \tag{4-93}$$

于是得到

$$\begin{cases} \dot{a} = -\mu\varepsilon a - \dfrac{3\alpha\varepsilon\Lambda}{4\omega_0}a^2\sin\gamma \\ a\dot{\gamma} = \left(\sigma - \dfrac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0}\right)\varepsilon a - \dfrac{9\alpha\varepsilon}{8\omega_0}a^3 - \dfrac{9\alpha\varepsilon\Lambda}{4\omega_0}a^2\cos\gamma \end{cases} \tag{4-94}$$

所以一次近似解为

$$x = a\cos\left[\frac{1}{3}(\Omega t - \gamma)\right] + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1}\cos\Omega t \tag{4-95}$$

上式中 a 和 γ 由式(4-94)给出。

稳态运动对应于 $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$，和主共振、超谐共振类似，可以得到频率响应方程

$$\left[9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha}{8\omega_0}a^2\right)^2\right]a^2 = \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16\omega_0^2}a^4 \tag{4-96}$$

由上式可知，或者 $a=0$，或者

$$\left[9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha}{8\omega_0}a^2\right)^2\right] = \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16\omega_0^2}a^2 \tag{4-97}$$

式(4-97)是 a^2 的二次方程，它的解为

$$a^2 = p \pm (p^2 - q)^{1/2} \tag{4-98}$$

式中

$$p = \frac{8\omega_0\sigma}{9\alpha} - 6\Lambda^2, \quad q = \frac{64\omega_0^2}{81\alpha^2}\left[9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0}\right)^2\right] \tag{4-99}$$

注意到 q 总是正的，因而仅当 $p>0$ 且 $p^2 \geqslant q$ 时，才存在非平凡的自由振动振幅。在 $\Lambda\sigma$ 平面上，存在非平凡解的区域的边界由

$$\frac{63\alpha\Lambda^2}{4\omega_0\mu} = \frac{\sigma}{\mu} \pm \left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} - 63\right)^{1/2} \tag{4-100}$$

给出，对于 $\alpha>0$ 的情况，这条边界示于图 4－14。

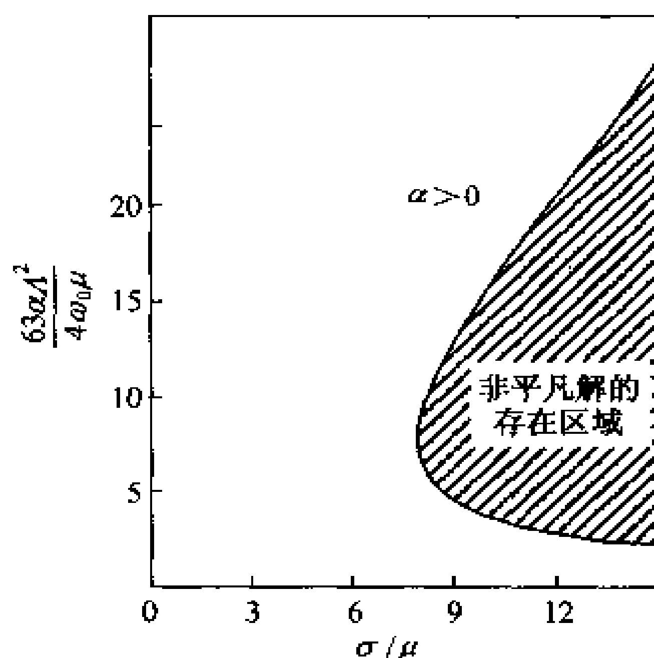


图 4－14　存在次谐波共振的区域

当这些条件成立时，和线性解不同，尽管存在着阻尼，系统仍旧可以使自由振动项不衰减到零。而且在稳态下，非线性性质将自由振动项的频率调整为激励频率的三分之一，从而使响应成为周期的。因为自由振动项的频率是激励频率的三分之一，这种共振称为次谐波共振或分频。在图 4－15(a)上画出了几条频率响应曲线，在图 4－15(b)上自由振动项的振幅已画成了激励幅值的

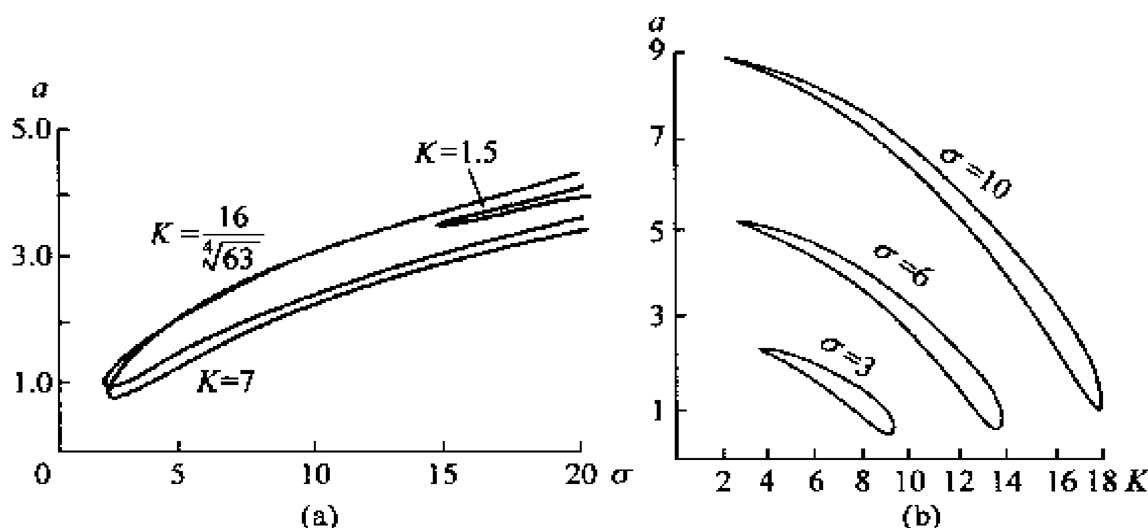


图 4-15 杜芬方程的次谐波响应

(a) 自由振动项的振幅—解谐参数曲线；

(b) 自由振动项的振幅—激励幅值曲线。

函数。应该注意到，在现在的情形下不存在跳跃现象。

对于多频激励，可以同时存在多于一个的共振条件，这就是说，可以同时存在超谐波共振和次谐波共振，或者同时存在超谐波共振和组合共振等，在本节不再进行详细讨论，读者请参阅相关文献[8, 9, 14]。

4.5 参数激励系统的振动

这一节中，我们考虑的运动仍是系统上作用有依赖于时间的激励的情况。但与上节不同的是，激励作为微分方程的变系数出现，即参数激励。系统在参数激励下所产生的响应有时可能很微弱，但也可能出现剧烈的参数共振现象，这取决于参数激励振动系统的稳定性。描述参数激励振动的数学模型为周期变系数的常微分方程，因此，对参数激励振动的研究归结于对变系数常微分方程解的稳定性的研究。

工程中许多参数激励振动问题，例如，受轴向周期力激励的直杆、非圆截面轴的横向振动、电动机车传动轴的扭振以及变长度摆等，它们的数学模型经过一定变换后，都可以化为马蒂厄方程[11]

$$\ddot{x} + (\delta + 2\varepsilon\cos\omega t)x = 0 \qquad (4-101)$$

因此，本节主要讨论马蒂厄方程的稳定性问题。

根据弗洛凯(Floquet)定理[7]可知，系统的特征指数为 0 或 i (或者说，解具有 π 或 2π 的周期)时，系统处于临界状态，即稳定与不稳定的分界线。因此，若我们先假设系统具有周期为 π 或2π 的周期解，然后在参数平面(δ,ε)中确定能使该假设成立的参数值，这样便可以在参数平面(δ,ε)得到稳定区与不稳定区的分界线$\delta(\varepsilon)$。当ε很小时，可以采用 4.3 节中介绍的 L－P 法进行求解。

为此设式(4－101)的解为

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots \qquad (4-102)$$

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta + \cdots \qquad (4-103)$$

将式(4－102)和式(4－103)代入式(4－101)，比较ε同次幂的系数，得

$$\ddot{x}_0 + \delta_0 x_0 = 0 \qquad (4-104)$$

$$\ddot{x}_1 + \delta_0 x_1 = -\delta_1 x_0 - 2x_0\cos 2t \qquad (4-105)$$

$$\ddot{x}_2 + \delta_0 x_2 = -\delta_2 x_0 - \delta_1 x_1 - 2x_1\cos 2t \qquad (4-106)$$

令

$$\delta_0 = n^2 \quad (n = 0,1,2,\cdots) \qquad (4-107)$$

式(4－104)以 π 为周期的周期解为

$$x_0 = a\cos 2nt + b\sin 2nt \quad (n = 0,1,2,\cdots) \qquad (4-108)$$

以 2π 为周期的周期解为

$$x_0 = a\cos(2n-1)t + b\sin(2n-1)t \quad (n = 1,2,\cdots) \qquad (4-109)$$

式中：a 和 b 是任意常数。以下分别按照$\delta_0 = 0,1,4$等情况分别

进行讨论。

（1）$\delta_0=0$ 时，$x_0=a$，将 x_0 代入式（4－105）得

$$\ddot{x}_1=-\delta_1 a-2a\cos 2t \qquad (4-110)$$

由 x_1 为周期解的条件，应有 $\delta_1=0$，从而可得

$$x_1=\frac{1}{2}a\cos 2t \qquad (4-111)$$

把所得的 x_0 及 x_1 代入式（4－106），得

$$\ddot{x}_2=-\delta_2 a-\frac{1}{2}a(1+\cos 4t)=-\left(\delta_2+\frac{1}{2}\right)a-\frac{1}{2}a\cos 4t \qquad (4-112)$$

同样，根据周期解的要求，必有 $\delta_2=-\frac{1}{2}$，从而可得

$$\delta=-\frac{1}{2}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3);\ x=a\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\cos 2t\right)+O(\varepsilon^2) \qquad (4-113)$$

在参数平面上（如图 4－101 所示），$\delta=-\frac{1}{2}\varepsilon^2$ 为过原点的曲线，它对应于周期为 π 的周期解。

（2）$\delta_0=1$ 时，$x_0=a\cos t+b\sin t$，式（4－105）变为

$$\ddot{x}_1+x_1=-a(\delta_1+1)\cos t-b(\delta_1-1)\sin t-a\cos 3t-b\sin 3t \qquad (4-114)$$

由上式的解不出现永年项的条件，应有

$$\delta_1=-1,\ b=0 \qquad (4-115)$$

或

$$\delta_1=1,\ a=0 \qquad (4-116)$$

对第一个结果 $\quad x_1=\frac{1}{8}a\cos 3t$

对第二个结果　　$x_1=\frac{1}{8}b\sin 3t$

将 x_1 的两个结果分别代入式(4-106)，得

$$\ddot{x}_2+x_2=-a\left(\delta_2+\frac{1}{8}\right)\cos t+\frac{1}{8}a\cos 3t-\frac{1}{8}a\cos 5t$$

$$\ddot{x}_2+x_2=-b\left(\delta_2+\frac{1}{8}\right)\sin t-\frac{1}{8}b\sin 3t-\frac{1}{8}b\sin 5t$$

因为 x_2 也是周期解，所以从上述两个方程中消除永年项可以得到 $\delta_2=-\frac{1}{8}$，从而得到从 $\delta_0=1$ 开始的两条分界线分别为

$$\begin{aligned}\delta&=1-\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)\\ \delta&=1+\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\tag{4-117}$$

它们分别对应于周期为 2π 的周期解

$$\begin{aligned}x&=a\left(\cos t+\frac{1}{8}\varepsilon\cos 3t\right)+O(\varepsilon^2)\\ x&=b\left(\sin t+\frac{1}{8}\varepsilon\sin 3t\right)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{4-118}$$

(3) $\delta_0=4$ 时，$x_0=a\cos 2t+b\sin 2t$，于是式(4-105)变为

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1+4x_1=&-\delta_1(a\cos 2t+b\sin 2t)-\\ &a(1+\cos 4t)-b\sin 4t\end{aligned}\tag{4-119}$$

消除永年项的条件要求 $\delta_1=0$，因此式(4-119)的特解为

$$x_1=-\frac{1}{4}a+\frac{1}{12}a\cos 4t+\frac{1}{12}b\sin 4t\tag{4-120}$$

将 x_0 和 x_1 代入式(4-106)，并注意到 $\delta_1=0$，可得

$$\ddot{x}_2+4x_2=-a\left(\delta_2-\frac{5}{12}\right)\cos 2t-b\left(\delta_2+\frac{1}{12}\right)\sin 2t$$

$$-\frac{1}{12}a\cos 6t-\frac{1}{12}b\sin 6t \tag{4-121}$$

由消除永年项的条件,应有

$$a\left(\delta_2-\frac{5}{12}\right)=0;\ b\left(\delta_2+\frac{1}{12}\right)=0$$

对非平凡解,必有如下两个结果

$$\delta_2=\frac{5}{12},\ b=0$$

$$\delta_2=-\frac{1}{12},\ a=0$$

因此,从 $\delta_0=4$ 开始的分界线为

$$\begin{cases}\delta=4+\dfrac{5}{12}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)\\ \delta=4-\dfrac{1}{12}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)\end{cases} \tag{4-122}$$

它们对应的周期解为

$$\begin{cases}x=a\cos 2t-\dfrac{1}{4}\varepsilon a\left(1-\dfrac{1}{3}\cos 4t\right)+O(\varepsilon^2)\\ x=b\sin 2t+\dfrac{1}{12}\varepsilon b\sin 4t+O(\varepsilon^2)\end{cases} \tag{4-123}$$

以上所讨论的结果,如图 4-16 所示。进一步分析可知,图中画剖面线部分是不稳定区域,其余为稳定区域。随着参数 δ 的增加,稳定区域越来越大。对实际工程问题而言,分界线上周期解的稳定性并不重要,因为我们总是要求系统在远离不稳定区中运动。当系统的参数落入不稳定区域时,即发生了参数共振。从图中可以看出,发生参数共振的区域是一个一个连续的参数区间。从某种意义上说,避开参数的共振比避开因受迫振动而产生的共振要困难得多。

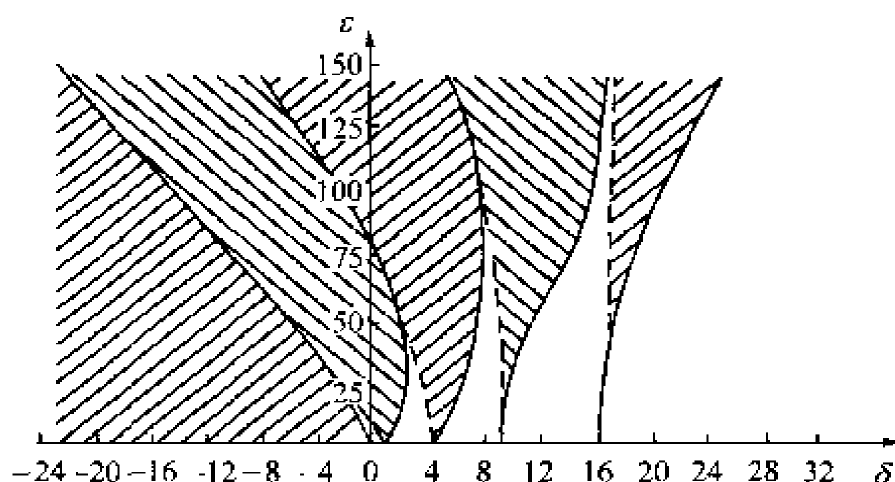


图 4－16　马蒂厄方程参数平面的稳定区

4.6　混沌振动

以上各节分析表明，线性系统与非线性系统存在许多本质差别。例如，线性系统受到周期激励时，只产生同频周期响应；而非线性系统除同频响应外，还产生超谐波和次谐波响应。又例如，无阻尼线性系统的自由振动周期与初始条件无关；而非线性系统的自由振动周期与初始条件有关。但前面仅讨论了非线性系统的周期运动，此外，非线性系统还可能出现更为复杂的运动现象，这便是混沌运动。非线性振动系统中的混沌称为混沌振动，简称混沌。

4.6.1　混沌的概念

混沌指的是在确定性系统中出现的类似随机的运动。一个不含随机因素的动力学系统称之为确定性系统，它通常用常微分方程、偏微分方程、差分方程甚至一些简单的迭代方程所描述，而方程中各系数都是确定的。对于确定的初始值，从数学上说，动力学系统应给出一个确定性的解或运动。但在某些系统中，这种运动可能由于初始值的微小扰动而发生很大变化，因而从物理上看，得到的解似乎是随机的，这种现象称为确定性系统中的内在随机性。只有非线性系统才可能呈现这种内在随机性，同时就其本质而言，

它和由于方程中有随机项或随机系数而得到的随机过程不同。可以说,混沌正是非线性动力学系统具有内在随机性的表现形式[15]。

混沌现象虽已引起了学术界的广泛兴趣,但作为一个科学词语"混沌"至今还没有一个公认的普遍适用的定义。被誉为"混沌之父"的洛伦兹(Lorenz)指出,混沌系统是指敏感依赖于初始条件而内在变化的系统[16]。这里,"内在"是指初始条件的变化不改变有效常量(那些在系统演变无干扰时保持不变的量定义为有效常量)。李天岩(Li)和约克(York)在1975年发表的论文"周期三意味着混沌"的文章中首先提出现代科学意义上的"混沌"概念并给出了混沌的一种数学定义[17]。李-约克定义的缺陷在于所指集合的勒贝格测度有可能为零,此时混沌是不可观测的,而我们感兴趣的则往往是可观测的情形。

根据李-约克定义,1983年戴(Day)认为一个混沌系统应该具有如下三种性质:第一,存在所有阶的周期轨道;第二,存在一个不可数集合,该集合只含有混沌轨道,且任意两个轨道既不趋向远离也不趋向接近,而是两种状态交替出现,同时任一轨道不趋向任一周期轨道,即该集合不存在渐近周期轨道;第三,混沌轨道具有高度的不稳定性[18]。

德凡尼(Devaney)在1989年给出了混沌的另一个定义[19]:

设 V 为一度量空间。一个连续映射 $f:V\to V$ 称为 V 上的混沌,如果

① f 具有对初始条件的敏感依赖性;

② f 是拓扑传递的;

③ 周期点在 V 中稠密。

除了上述对混沌的定义之外,还有诸如斯梅尔(Smale)马蹄、横截同宿点、拓扑混沌以及符号动力系统等定义。有人认为,不严格地说,当一个系统如果同时具有对初值的敏感性以及出现非周期运动时,则可认为该系统是混沌的。而多数学者则认为,给出混沌的精确定义是一件相当困难的事。突变论的创始人托姆

(Thom)更是认为"混沌"一词不可能有严格的数学定义。尽管如此,不同研究领域的学者都是基于各自对混沌的理解进行研究并谋求各自的应用[18]。

4.6.2 混沌的几何特征

周期运动每隔一个周期就要重复以前的运动,即存在常数 T 满足 $x(t)=x(t+T)$。这时易证 $\dot{x}(t)=\dot{x}(t+T)$,故周期运动的相轨迹曲线是闭曲线。混沌不具有周期性,因而混沌振动的相轨迹曲线是不封闭的曲线,但其局限于一有界区域内,不会发散到无穷远。

当周期运动的周期很长时,仅根据相平面图难以区分周期运动和混沌运动。庞开莱(Poincaré)映射能更好地刻画混沌吸引子的分形特性。如果庞开莱映射既不是有限点集也不是封闭曲线,则对应的运动可能是混沌振动。进一步区分,如果系统没有外部噪声扰动又存在阻尼因素,则庞开莱映射的结果将是具有某种细致结构的点集。如果系统受外噪声扰动或阻尼很小,庞开莱映射的结果将是模糊一片的点集。这里所说的细致结构,是指相继将点集的某一局部放大后都具有与整体类似的结构。也就是说,确定性有阻尼系统混沌振动的庞开莱映射是具有自相似分形结构的点集。由于庞开莱映射的分辨率高于相平面图,故庞开莱映射更经常被采用。霍尔姆斯-杜芬(Holmes-Duffing)振子的庞开莱映射如图4-17所示。

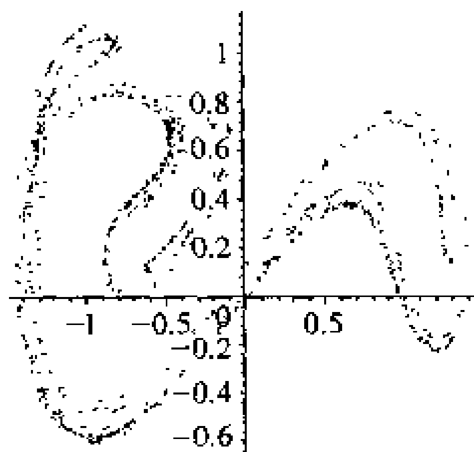


图4-17 霍尔姆斯-杜芬振子的庞开莱映射($\ddot{x}+c\dot{x}-ax+bx^3=f\cos\omega t$)

对于描述多自由度系统运动的高维系统,几何结构不再有直观的图示,因此需要采用数值方法识别混沌运动。

4.6.3 混沌的数值识别

前面介绍了混沌振动具有多方面的含义。将这些含义定量化便得到可用于识别混沌振动的各种数值特征。为刻画混沌振动对初值的敏感性,可以引人李雅普诺夫指数;为了刻画混沌吸引子的分形特征可以定义各种分形维数;为了刻画混沌振动的随机性,可以采用功率谱密度函数;为了刻画混沌振动的不可预测性,可以利用熵的概念。这里重点阐述李雅普诺夫指数、分形维数以及两者之间的关系。

1. 李雅普诺夫指数

混沌振动过程对初值的敏感性使得初始时刻靠得很近的两条相轨线随着时间增长逐渐远离。李雅普诺夫指数能够定量刻划这种邻近轨迹的发散性,即相空间内邻近轨迹的平均指数发散率的数值特征。n 维相空间中的某一时刻,两条邻近轨迹之间的距离可以分解在 n 个不同的方向,这 n 个不同方向上的距离增长率是不同的,每一个增长率就是一个李雅普诺夫指数。

将振动系统用 n 个一阶自治微分方程组描述

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in R^n \tag{4-124}$$

选系统(4-124)两条起始点相近的相轨迹 L_1 和 L_2,起始点分别为 x_0 和 $x_0+\Delta x_0$,称以 x_0 为初始值的轨线为基准相轨迹,以 $x_0+\Delta x_0$ 为初始值的相轨迹为邻近相轨迹。在 t 时刻,邻近相轨迹和基准相轨迹上的点为 $x(x_0+\Delta x_0,t)$ 和 $x(x_0,t)$,记 $w(x_0,t)=x(x_0+\Delta x_0,t)-x(x_0,t)$。当 w 充分小时,满足式(4-124)在 x_0 处的线性化方程

$$\dot{w} = Df \cdot w \tag{4-125}$$

式中:$n\times n$ 维雅可比矩阵 Df 在 x_0 处计算。此时两条邻近相轨迹沿 w 方向的平均指数发散率为

$$\lambda(x_0,w) = \lim_{\substack{t\to\infty \\ w_0\to 0}} \frac{1}{t}\ln\frac{\|w\|}{\|w_0\|} \tag{4-126}$$

式中：$w_0 = w(x_0, 0)$。在 n 维相空间中，w 的全体张成一个随相轨迹运动的 n 维空间，称为切空间。选择该切空间的一组基底 $\{e_j, j = 1, 2, \cdots, n\}$，对应于每个基底矢量 e_j，由式(4-126)可确定 n 个数值 $\lambda(x_0, e_j)(j = 1, 2, \cdots, n)$。将这组数值由大到小排列为

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \qquad (4-127)$$

称为系统(4-124)的李雅普诺夫指数。

李雅普诺夫指数可能为正，也可能为负。正的李雅普诺夫指数表示对应方向上的发散，负的李雅普诺夫指数表示对应方向上的收缩。对于自治系统，如果所有李雅普诺夫指数均为负，系统将趋于静止；如果有李雅普诺夫指数为零，而其余为负，系统作周期性运动；如果存在正李雅普诺夫指数且运动轨迹有界，则系统作混沌运动。由以上讨论可知，用李雅普诺夫指数识别混沌只需计算最大李雅普诺夫指数是否为正即可，这样可以大大减少计算量。

2. 分形维数

在线性代数中，空间的维数是指张成该空间所需独立矢量的数目。这种维数概念与人们日常生活中形成的直观的几何意识相符，点的维数为 0，直线的维数为 1，平面的维数为 2，……但这种维数概念难以描述数学研究中某些似点有似线的几何结构，如著名的康托(Cantor)集合。取一单位长度线段，等分为 3 段，截去中段，得到 2 个长度为 1/3 的线段；再将这两个长度为 1/3 的线段等分为 3 段，截去中段，得到 4 个长度为 1/9 的线段，如图 4-18 所示。如此进行下去，得到 2^n 个长度为 3^{-n} 的线段，令 $n \to \infty$ 所得到的集合称为康托集合。康托集合是无穷多但又无穷稀疏的点集，其维数介于 0 和 1 之间，上述维数概念不再适用。理论分析和数

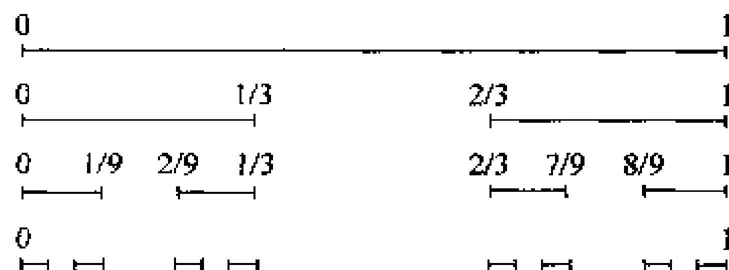


图 4-18　康托集合示意图

值计算都表明存在非常规的几何形体，其维数不是整数。这种维数为非整数的几何体称为分形。

对于分形几何体，其局部形态与整体形态类似，即在不同的放大级别上，几何形体的形态是相似的，这种性质称为自相似性。具有自相似性的几何体维数也往往不是整数，所以具有自相似性的精细结构的几何形体为分形。由于混沌是非周期而又局限于一有界区域内的运动，在相空间中其相轨迹被吸引在一个有限的空间区域内往复缠绕而恒不相交，因此可能存在具有自相似性的精细结构，即为分形。

若振动系统的吸引子为分形，则称该吸引子为奇怪吸引子。相应地，由点、闭曲线或闭环面构成的不是分形的吸引子称为平凡吸引子。耗散系统中，稳定平衡点、稳定周期运动和稳定准周期运动对应的吸引子分别为相空间中的点、闭曲线和闭环面，均为平凡吸引子。混沌运动对应的吸引子，称为混沌吸引子，通常是奇怪吸引子。因此，分形维数是识别混沌的指标之一。分形维的定义方法有豪斯多夫(Harsdroff)维、关联维、自相似维、盒维、李雅普诺夫维、信息维、K 熵维、谱维。其中豪斯多夫维数是最古老，也是最重要的一种维数，它对任何集都有定义，其定义为：

设集合 S 为 n 维空间的子集，$N(a)$ 是覆盖集合 S 所需边长为 a 的 n 维立方体的最小数目，则豪斯多夫维数为

$$d_H = \lim_{a\to 0}\frac{\ln N(a)}{\ln(1/a)} \tag{4-128}$$

然而，这种维数在理论上的意义远大于实际应用。对于一个分形集合，计算其豪斯多夫维数一般来说是相当困难的，实际上常用的是如下几种分形维数。

信息维数：设吸引子由 $N(a)$ 个边长为 a 的超小立方体覆盖。记 P_j 为轨迹出现在第 j 个超小立方体的概率，则用超小立方体进行测量所得到的信息量为

$$I = -\sum_{j=1}^{N(a)} P_j \ln P_j \tag{4-129}$$

在定义(4－128)中以信息量代替数目 $N(a)$，即得到信息维数

$$d_I = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\ln a} \sum_{j=1}^{N(a)} P_j \ln P_j \tag{4-130}$$

关联维数： 仍记 P_j 为轨迹出现在第 j 个超小立方体中的概率，则关联维数为

$$d_C = \lim_{a \to \infty} \frac{\ln \sum_{j=1}^{N(a)} P_j^2}{\ln a} \tag{4-131}$$

若相轨迹落人每个小立方体的概率均相等，即 $P_j = 1/N(a)$，则式(4－131)回到定义式(4－128)。

可以证明，三种维数满足不等式

$$d_C \leqslant d_I \leqslant d_H \tag{4-132}$$

事实上，具体的吸引子的关联维数、信息维数和豪斯多夫维数在数值上很接近。吸引子的分形维数往往与所在相空间的拓扑维数相差不大于2。但在特殊情形下也存在吸引子分形维数和拓扑维数之差大于2的例子，这类吸引子称为超胖吸引子。

由子李雅普诺夫指数和分形维数是对混沌运动的不同描述。李雅普诺夫指数描述了混沌运动的初态敏感性，分形维数描述了由混沌运动的非周期性产生的相轨迹的不规则性，因此两者之间可能存在某种联系。耗散系统的稳态动力学行为发生在维数低子相空间维数的吸引子上，从几何直观考虑，具有正李雅普诺夫指数和负李雅普诺夫指数的方向都对支承吸引子起作用，而负李雅普诺夫指数对应的收缩方向，在抵消膨胀方向的作用后，形成吸引子维数的非整数部分。因此，将李雅普诺夫指数从最大的 λ_1 开始，将后继的李雅普诺夫指数一一相加起来。设加到 λ_K 时的和 $\sum_{j=1}^{K} \lambda_j$ 为正数，而再加下一个 λ_{K+1} 后，和 $\sum_{j=1}^{K+1} \lambda_j$ 成为负数。很自然地设想吸引子维数介于 K 与 $K+1$ 之间。用线性插值确定维数的

非整数部分。因此定义李雅普诺夫维数

$$d_L = K + \frac{1}{-\lambda_{K+1}} \sum_{j=1}^{K} \lambda_j \qquad (4-133)$$

式中：K 为使 $\sum_{j=1}^{K} \lambda_j > 0$ 成立的最大整数。数值结果表明，对于不少最大李雅普诺夫指数为正的一维以上映射或非线性系统的李雅普诺夫维数与豪斯多夫维数相等或非常接近，卡普兰（Kaplan）和约克（York）推测 d_L 与 d_H 相等，故式（4－133）也称为卡普兰－约克猜想。高维系统李雅普诺夫维数与豪斯多夫维数的关系尚待深人研究。

这里需要注意的是，在一般情况下，混沌吸引子具有分形结构，具有分形结构的吸引子也是混沌吸引子，但在一些特殊情况下，存在具有分形结构的非混沌吸引子，也有整数维数的混沌吸引子。

3. 功率谱分析

由上一章的随机振动理论可知，功率谱可以表示随机运动过程在各频率成分上的统计特性，是研究随机振动的基本工具。混沌振动是有界的非周期运动，可视为无限多个不同频率的周期运动的叠加，具有类似随机运动的特征。为描述混沌振动的这种随机性，可以应用研究随机振动的频谱分析方法识别混沌振动。混沌运动的时间历程和功率谱如图 4－19 所示。

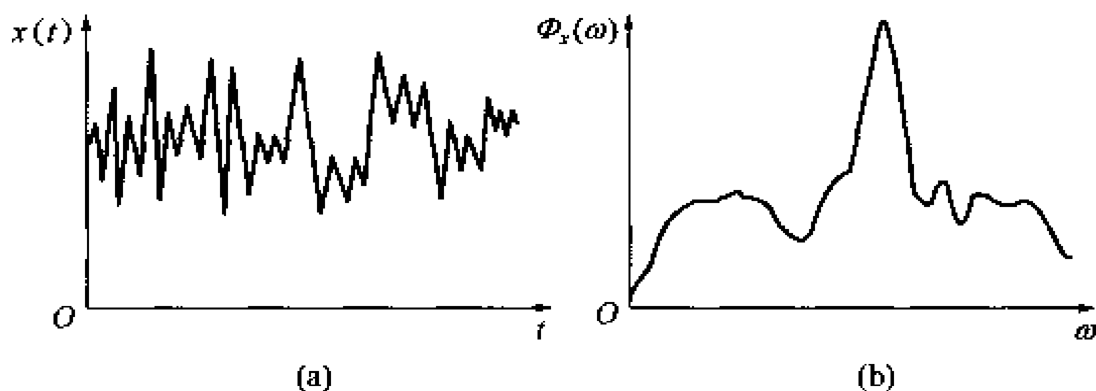


图 4－19 混沌运动的时间历程和功率谱

（a）时间历程；（b）功率谱。

需要指出的是,采用功率谱分析只能确定振动是否是随机的,但无法确定这种随机振动是由于外界的随机扰动,还是由于确定性非线性系统的内禀随机性。因此,功率谱分析不能区分混沌振动和真正的随机振动,还需要结合其它指标来作判断。

4.6.4 混沌的应用

混沌理论的研究是一个极富挑战性的具有交叉学科性质的重大课题,具有巨大的应用潜力。特别是 20 世纪 90 年代以来混沌同步与控制的突破性进展及由此激发起来的混沌研究热潮,给混沌的可能应用带来了新的契机,为人们展现了十分诱人的应用与发展前景[20]。

混沌研究的应用概况和应用前景可以粗略地概括如下[21]。

1. 在工程上的应用

应用的领域有:振动控制、非线性电路的镇定、加速溶液混合和化学反应、提高激光器性能、流体力学等[22]。美国海军研究实验室的一个研究小组利用混沌跟踪控制法,不仅在很宽的功率范围内维持激光装置的稳定运行,而且惊人地把激光输出功率提高了 15 倍。1993 年,美国航空航天局(NASA)的科学家们利用三体问题的混沌特性,即对于微小扰动的极度敏感性,使用非常少量的残余氢燃科把一个 ISEE - 3/ICE 飞行装置送到太阳系以外[23]。1995 年,龙运佳等研制出的具有很强的几何非线性及物理非线性的混沌激振器[24],可作为振动作业器械的高效振源,已获得国家专利。针对线谱是舰艇水声隐身性能的主要危害并难以消除这一情况,楼京俊等利用非线性隔振系统出现混沌时功率谱呈现连续谱并下降这一特性,提出了可应用于舰艇结构噪声线谱控制的混沌隔振方法。该方法可以将集中于某一频率的能量分散到较宽的频带上,从而最大限度地消除舰艇辐射水声中的线谱成分[25]。

2. 在智能信息处理中的应用

混沌是产生动力学信息的自律系统,如果能够使不失去自律性的信息转化为有用的东西,则有可能利用简单器件实现较复杂

的功能或动力学行为。某些具有约束的混沌现象为实现非冯·诺依曼型搜索给出了重要的启示。在模式识别、非线性系统的辨识等方面混沌理论都有其用武之地。

3. 在通信方面的应用

如保密通信、扩频、信息压缩与存储等，利用混沌同步实现秘密通信是近年来竞争最激烈的应用研究领域。

4. 在医疗和生物方面的应用

除了脑神经系统以外，心肌细胞、心电图、血小板生成、肾小体等也都成为"生物混沌学"的研究对象。现在利用混沌控制技术正在加紧研究一种心脏整律器及去纤维颤动器。

5. 在计算机方面的应用

如实现丰富多彩的计算机图形、计算机图形压缩、研究超高容量的动态信息存储器等，有人把神经、模糊、混沌合在一起，称之为"新一代的模拟计算机技术"。

6. 在社会经济学方面的应用

如经济预测、金融分析、流行病分析、天气预报和地震预测等。

7. 加强了科学技术各领域的横向联系，促进了各学科的发展

考虑和利用混沌的某些特征，如奇怪吸引子(意味着在混沌系统中能产生某种自治的序)，对于设计控制系统有时是非常有益的。认识到这一点，我们可以为一些本质为非线性的系统设计简单得多的控制器或获得更好的控制性能。有时还可以节省大量的资源来实现同样的控制目标，甚至使一些原本"无法控制"的对象获得控制[26-28]。

随着混沌研究的进一步深入，可以相信，混沌科学的应用领域将不断扩展和深入，混沌科学将越来越受到人们的重视。

参考文献

[1] 师汉民，谌刚，吴雅．机械振动系统——分析·测试·建模·对策．武汉：华中理工大学出版社，1992.

[2] 曹树谦,张文德.振动结构模态分析:理论,实验与应用.天津:天津大学出版社,2001.

[3] Guckenheimer J,Holmes P. Nonlinear Oscillations,Dynamical system and Bifurcations of Vector Fields. 3rd ed. New York:Springer – Verlag,1990.

[4] Ott E. Chaos in Dynamical systems. Cambridge:Cambridge University Press,2002.

[5] 陆启韶.分岔与奇异性.上海:上海科技教育出版社,1995.

[6] 陈予恕,唐云.非线性动力学中的现代分析方法.北京:科学出版社,2000.

[7] 唐云.对称性分岔理论基础.北京:科学出版社,2000.

[8] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations. New York: John Wiley &Sons Co,1979.

[9] 陈予恕.非线性振动.天津:天津科技出版社,1983.

[10] 丁文镜.工程中的自激振动.长春:吉林教育出版社,1988.

[11] 刘延柱,陈立群.非线性振动.北京:高等教育出版社,2001.

[12] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques. New York:John Wiley &Sons Co,1981.

[13] 周纪卿,朱因远,非线性振动.西安:西安交通大学出版社,1998.

[14] 褚亦清,李翠英.非线性振动分析.北京:北京理工大学出版社,1996.

[15] 陈忠平.混沌振动的数值模拟、实验识别及其应用前景的探讨.[硕士论文].北京:北京农业工程大学,1993.

[16] Lorenz E N. Essence of Chaos. Washington: University of Washington Press, 1993.

[17] Li T and York J. A., Period 3 Implies Chaos. American Mathematics Monthly. 1975, 82.

[18] 黄润生.混沌及其应用.武汉:武汉大学出版社,2000.

[19] 卢侃,孙建华等.混沌动力学.上海:上海翻译出版公司.1990.

[20] W L Ditto and L M Pecora. Mastering chaos. Scientific American,1993, (8): 62.

[21] 李勤学,王万良.混沌及其控制进展.机电工程.1999(5):56 ~ 59.

[22] Ditto W L. Principles and applications of chaotic system. Communications of the ACM,1995,38(11):96.

[23] Shinbrot T. Using small perturbations to control chaos. Nature. 1993, 363: 411.

[24] 龙运佳.混沌振动研究.北京:清华大学出版社.1997.

[25] Lou Jingjun, Zhu Shijian, He Lin, et al. Application of Chaos Method to Line Spectra Reduction. Journal of Sound and Vibration. 2005, 286(3): 645 ~ 652.

[26] Kompass E J. Can chaos be used in control. Control Engineering. 1995, 42(8): 73.

[27] Jones and Jeremy. Chaos Reigns. Control and Instrumentation, 1995, 27(2): 50.

[28] Spano M L. Exploitation of chaos for active control: an experiment. Journal of Intelligent Material System and Structures. 1995, 2(4): 482.

第5章　隔振系统动态特性

隔振是振动控制的主要方法之一，该方法通过一个包含了特殊装置的辅助系统将振源和被保护物体隔离开来。这种特殊装置称为隔振器或隔振装置。隔振的作用是减小振源和被隔振物体之间的动态耦合，从而减少不良振动传递给被保护物体或从物体传出。减少这种动态耦合的同时也会产生一些“负面”影响，例如，增加振源和被保护物体之间的静态位移，增加它们之间的低频和瞬时相对位移，以及增加安装的尺寸、重量和成本等。在柔性隔振器上安装一些相互连接着的部件时，会增加它们之间的不对中误差，这通常具有危害性。在许多情况下，需要采用一种多参数优化方法来获得合适的隔振效果并满足其它约束条件。为此，本章介绍了隔振系统的动态特性，为不同被隔振物体设计有效的隔振系统提供必备的基本知识。

5.1　概　　述

隔振系统包括被隔振物体、支承结构（地面、基础）和放置在两者之间的隔振器（装置）。图5-1所示为最简单的“单轴向”隔振系统。由于环境的影响，被隔振物体必须得以保护从而避免受到支承结构振动产生的不利影响，或者必须对支承结构进行保护以免受被隔振物体产生的动态载荷的影响。有些时候，上述两种情况必须同时考虑。图5-1中表示出的3个于系统（被隔振物体、隔振器、支承结构）在一般情况下都是具有多个或者无穷多个自由度的分布参数动力学系统。

被隔振物体（如机器）通常由许多连接在一起的元件组成。如果每个元件近似看作是一个绝对的刚体，连接部分近似看作是一个集总参数弹簧系统，那么每个元件具有6个自由度。在更高的频率时，每个元件则应当作具有无穷多自由度的分布参数动力学系统，此时基础结构也应当作具有无穷自由度的分布参数系统。对隔振器的描述也应与此相同，同时，图5－1所示的子系统内部和子系统之间的许多连接件具有非线性特性，因此不难想象隔振系统的动态特性有多复杂。幸运的是，在绝大多数的实际隔振系统中，我们只对低频范围内的振动感兴趣。并且，在许多情况下，被隔振物体和支承结构的最低自然频率（对隔振至关重要）比隔振系统（被隔振物体－隔振器－支承结构）的自然频率高得多。通常情况下（但不是总成立）隔振器弹性元件的质量比被隔振物体的质量要小得多，因而，在低频情况下，该质量可以忽略不计，这样隔振器便可当作无质量的弹簧。在高频时，这种假设不成立，此时，必须考虑弹性元件中的波共振（见第6.3节）效应。在许多实际情况中，隔振效果在低频范围约5Hz～100Hz时特别明显。通常只有被隔振物体、隔振器和支承结构的最低结构模态处于这一频率范围内，而更高的模态被忽略掉了。当被隔振物体和支承结构被当作理想刚体且隔振器被看作无质量时，可以得到许多具有实用价值的结论。

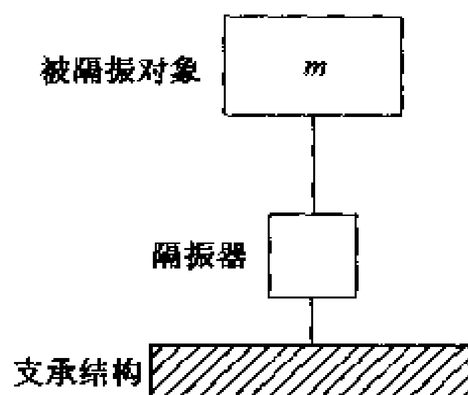


图5－1　单轴向隔振系统

基于上述假设，隔振系统可以当作至少在第一次近似中可以当作6自由度系统。考虑到特定的惯性特征和几何特征，以及典型的被隔振物体的设计特征后，通常可以进一步简化系统。

对隔振系统进行正确的设计可以得到具有良好隔振性能且刚度较大的隔振器，这样可以最大限度地防止系统产生剧烈的摇动。

前面提到，隔振系统相当复杂，因而从整体上对整个系统和它

的子系统进行分析是非常有意义的。本章对固定物体的隔振系统的基本特点进行了讨论。

5.2 单自由度隔振系统的动态特性

隔振的目的各不相同。有时被隔振物体是稳态振源或者冲击源，它们以动态力或振动力的形式传递到基座或者基础部分，此时，隔振的目的就是阻止或者减小这种力传递到基础；有时被隔振物体对振动非常敏感，因而此时的隔振目的就是为了保护被隔振物体免受从振源（通过基础）传递过来的稳定或瞬时振动的破坏（如精密的步进对准曝光系统）[1]。还有些被隔振物体在工作过程中对振动非常敏感，而它内部元件运动时却能产生不希望出现的动态载荷（例如，精密平面磨床的重型工作台作往复运动时，或者坐标测量设备的重型台架开始或停止运动时）。汽车上的发动机与此类似却略有不同，一方面，发动机产生的振动能传递给汽车中的乘员，而另一方面，又必须保护发动机不受由于路面不平而产生的强烈振动的破坏[2]。

相应地，从被隔振物体到基础或者反过来从基础到被隔振物体之间的振动力或者位移（或者加速度）的传递都是我们感兴趣的。这些传递取决于动态输入的频谱成分和系统的自然频率、自然模态之间的关系。同时，它们还取决于隔振器的刚度、被隔振物体和基础的有效质量，最重要的是它们取决于隔振器阻尼的特征和大小。当于系统的特征需要详细进行考虑时，例如，当需要考虑隔振器中的波共振以及被隔振物体或基础的多个自然模态时，于系统不能再当作如图 5－1 所示的集总参数系统，面需要通过阻抗来描述[3]。

研究表明通过对基本的、一般的隔振系统进行分析，来揭示一些关键因素如阻尼、坐标之间的耦合等的影响，可以更好地理解（即使是这样，它还是一种定性分析）隔振系统的动态过程。这些分析的结果有利于更有效地应用软件并开发出更具鲁棒性的隔振

系统，使得它们对主要子系统的动态特性以及激励频谱的成分和强度的变化不太敏感。

单自由度、单轴向隔振系统是一个便于分析隔振装置基本动态效果的模型。隔振系统典型的模型包括如图 5－1 所示的三个子系统：被隔振物体（质量为 m）；柔性连接（隔振器）；非接触的基础（质量为 m_f）。除非一个很重的对象安装在很薄的混凝土地板上，通常情况下有 $m_f \gg m$，或至少 $m_f > m$。这个系统中的隔振器只能够在一个方向上发生变形。根据弹性元件中能量耗散的特点及其设计，单轴向系统的动力学模型可以有所改变。对固定物体进行隔振的典型动态模型及其变型共有四种，如图 5－2 所示。在图 5－2(a)中，隔振器表示为一个弹性元件（刚度为 k）与黏性阻尼器的并联，当两个终端的相对位移为 x 时，黏性阻尼器产生的阻尼力 F_v 与相对速度成正比，即 $F_v = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$，其中 c 是阻尼系数。纯黏性阻尼器是对阻尼理想化以及便于对问题进行分析而提出的，并非一个实际存在的元件。图 5－2(b)中隔振器的弹性元件将弹性（刚度为 k）和迟滞型能量耗散特性（材料阻尼）组合在了一起[3,4]。此时相对的能量耗散 ψ（对数衰减率为 δ）不依赖于振动的频率 ω。研究表明，这种迟滞阻尼可以通过一个变阻尼系数的线性（黏性）阻尼器来表示[4]

$$c_h = c(\omega) = \psi/2\pi \tag{5-1}$$

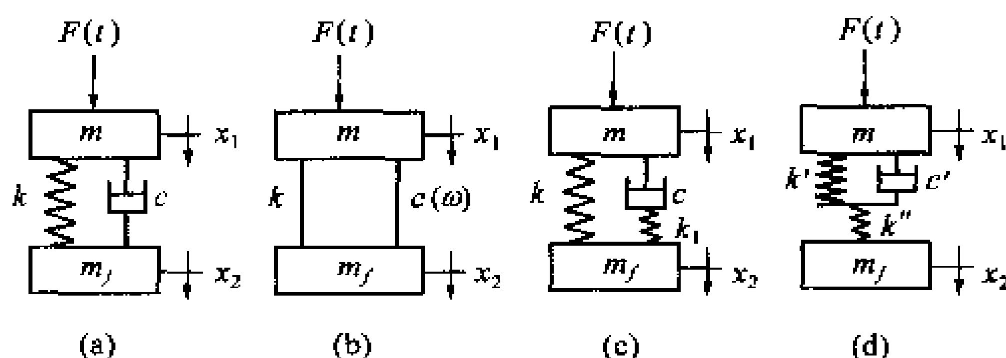


图 5－2　常见单轴向隔振系统的典型模型

(a) 具有刚度 k 和黏性阻尼 c 的隔振器；(b) 具有刚度 k 和迟滞阻尼 $c(\omega)$ 的隔振器；(c)，(d) 松弛型隔振器。

迟滞阻尼为弹性－阻尼材料的基本特征，这类材料有橡胶、金属丝网等。

图5－2(c)、(d)是两种松弛型隔振系统[5]。在图5－2(c)中，隔振器表示为粘性阻尼器 c 串联弹性元件 $k_1 = Nk$ 后和弹性元件 k 并联。在图5－2(d)中，带阻尼的隔振器 k'—c' 和无阻尼隔振器 $k'' = NK'$ 通过串联连接。研究表明[5]，如果 $k = [N/(N+1)]k'$ 并且 $c = [N/(N+1)]^2 c'$ 时，这些隔离器是动态等效的。

在诸如汽车的悬挂机构等振动幅值很大的振动控制应用中，隔振器有时带有库仑摩擦阻尼器。这些隔振器不能够满足精密机械或仪器中隔振系统的要求，主要是由于它们对小振幅振动不敏感。

在图5－2中，单轴向隔振系统取得的隔振效果可以通过绝对或者相对传递率来表征。绝对传递率表示隔振系统对动态力或振动消减的程度。如果振源是被隔振物体本身，那么传递率是指传递到基础上的力的幅值与初始的激励力幅值之比。如果振源是基础，那么传递率是指被隔振物体的振动幅值和基础振动的幅值之比。相对传递率是指被隔振物体和基础之间的振动位移(弹性元件的变形量大小)和基础运动的幅值之比。

5.2.1 具有黏性阻尼的隔振器(图5－2(a))

该系统的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) &= F \\ m_f\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5-2)$$

将第一个方程乘以 m_f，第二个方程乘以 m，然后将第一个方程减去第二个方程，得

$$\frac{mm_f}{m + m_f}\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = \frac{m_f}{m + m_f}F \qquad (5-3)$$

式中：$\theta = x_1 - x_2$，$mm_f/(m + m_f) = m_{ef}$ 为系统的"有效质量"。

式(5－2)和式(5－3)的能量耗散(阻尼)特征由下面不同的

式子来表示

$$\Delta = \frac{c}{2m_{cr}} = \frac{c(m + m_f)}{2mm_f};\ \zeta = \frac{c}{c_{cr}};$$

$$c_{cr} = 2\omega_n \frac{mm_f}{m + m_f} = 2\sqrt{k \frac{mm_f}{m + m_f}};$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\frac{mm_f}{m + m_f}}};\ \delta = \frac{2\pi \frac{c}{c_{cr}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}} \approx \frac{\pi c}{\omega_n \frac{mm_f}{m + m_f}};$$

$$\mu_{res} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega_n mm_f}{c(m + m_f)};\ \psi = \frac{\Delta\Pi}{\Pi} = \frac{2\pi c\omega}{k} \qquad (5-4)$$

式中：c 是阻尼系数，Δ 是相对阻尼系数，c_{cr}是临界阻尼系数，ζ 是相对阻尼，δ 是对数衰减率，μ_{res}是共振放大因子，ω_n 是自然角频率，Π 是振动系统一个周期中最大的势能。$\Delta\Pi$ 是指在一个周期中耗散的能量（黏性阻尼系统中为振动频率 ω 的函数），ψ 是在一个振动周期中所耗散的相对能量。在共振或者自由振动的过程中，$\psi = 2\pi c\omega_n/k \approx 2\delta$。

为了确定在简谐（正弦）激励力 $F = F_0\sin\omega t$ 作用下力（以及位移或加速度）的传递率，其中：F_0 是激励力的幅值。激励力可以用复变量表示，$F = F_0 e^{i\omega t}$。因此，弹性元件的变形为 $\theta = \theta_0 e^{i(\omega t + \phi)}$，其中，$\phi$ 是力和变形之间的相位差。将这些式子代入式（5－3），并考虑作用在基础上的力 $F_f = k\theta + c\dot{\theta}$，得

$$F_f = \frac{\frac{m_f}{m + m_f} F_0 (k + ic\omega) e^{i\omega t}}{\left(-\frac{mm_f}{m + m_f}\omega^2 + k\right) + ic\omega} \qquad (5-5)$$

由此可得绝对力传递系数

$$\mu_F=\frac{|F_f|}{|F_o|}=\frac{|x_1|}{|x_2|}=\frac{m_f}{m+m_f}\sqrt{\frac{k^2+\omega^2c^2}{\left(k-\frac{mm_f}{m+m_f}\omega^2\right)^2+\omega^2c^2}}=$$

$$\frac{m_f}{m+m_f}\sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}=$$

$$\frac{m_f}{m+m_f}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

(5-6)

为了表示在基础"运动激励"下的绝对位移传递率，可以应用式(5-2)的第一个方程，令 $F=0$。如果基础的振动激励为 $x_2=x_{20}e^{i\omega t}$，那么有 $x_1=x_{10}e^{i(\omega t+\phi)}$，以及

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{k+ic\omega}{(k-m\omega^2)+ic\omega} \tag{5-7}$$

由式(5-7)可得绝对位移传递率

$$\mu_x=\frac{|x_1|}{|x_2|}=\sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

(5-8)

从式(5-6)、(5-8)可以看出，只有当基础为无穷大($m_f=\infty$)时，才有 $\mu_F=\mu_x=\mu$。

为了表示相对传递率μ_{rel}，令$F=0$，那么式(5－2)的第一个方程可以写为

$$m(\ddot{\theta}+\ddot{x}_2)+c\dot{\theta}+k\theta=0 \tag{5-9}$$

如果$x_2=x_{20}e^{i\omega t}$，$\theta=\theta_0 e^{i(\omega t+\Phi)}$，那么

$$\frac{\theta}{x_2}=\frac{m\omega^2}{-m\omega^2+ic\omega+k} \tag{5-10}$$

以及

$$\mu_{rel}=\frac{|\theta|}{|x_2|}=\sqrt{\frac{m^2\omega^4}{(k-m\omega^2)^2+\omega^2c^2}}=$$

$$\frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}=\frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{\delta}{\pi}\frac{\omega}{\omega_n}\right)}} \tag{5-11}$$

图5－2(a)所示系统在不同阻尼情况下的绝对传递率$\mu_F(\omega/\omega_n)_{m_f=\infty}=\mu_x$如图5－3所示。从图中可以看出，只有当频率比$\omega/\omega_n>\sqrt{2}\approx1.4$，或者只有在频率较高的区域实施隔振（减小振动的传递）时，绝对传递率μ_F和μ_x才小于1。当阻尼增加时，隔振区的传递率变大。但随着阻尼的增加，相对传递率一直是减小的，如图5－4所示。

5.2.2 具有内(迟滞)阻尼的隔振器(图5－2(b))

弹性－阻尼材料的阻尼作用机理与黏性阻尼的大不相同。具有弹性－阻尼材料的系统的对数衰减率像式(5－4)表示的那样不依赖于自然频率，但通常或多或少地依赖于激励频率，在某些情况下也依赖于振动的幅值。对于隔振器中常用的材料来说，如橡胶混合物等，在进行近似时，如果频率的范围较窄((50～100)Hz)且振幅较小，那么阻尼对频率和幅值的依赖性可以忽略。有多种

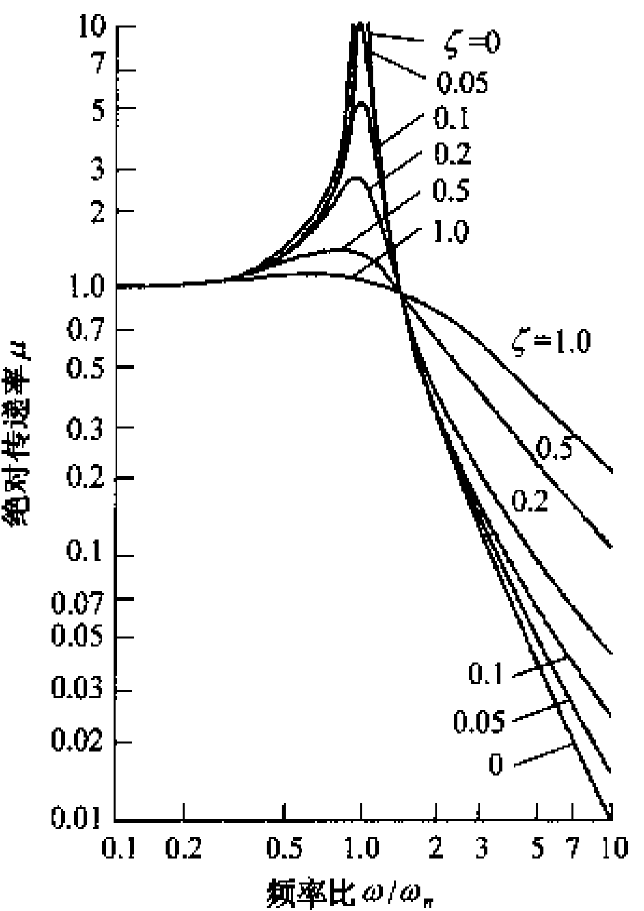


图 5－3　图 5－2(a)所示隔振系统的绝对传递率

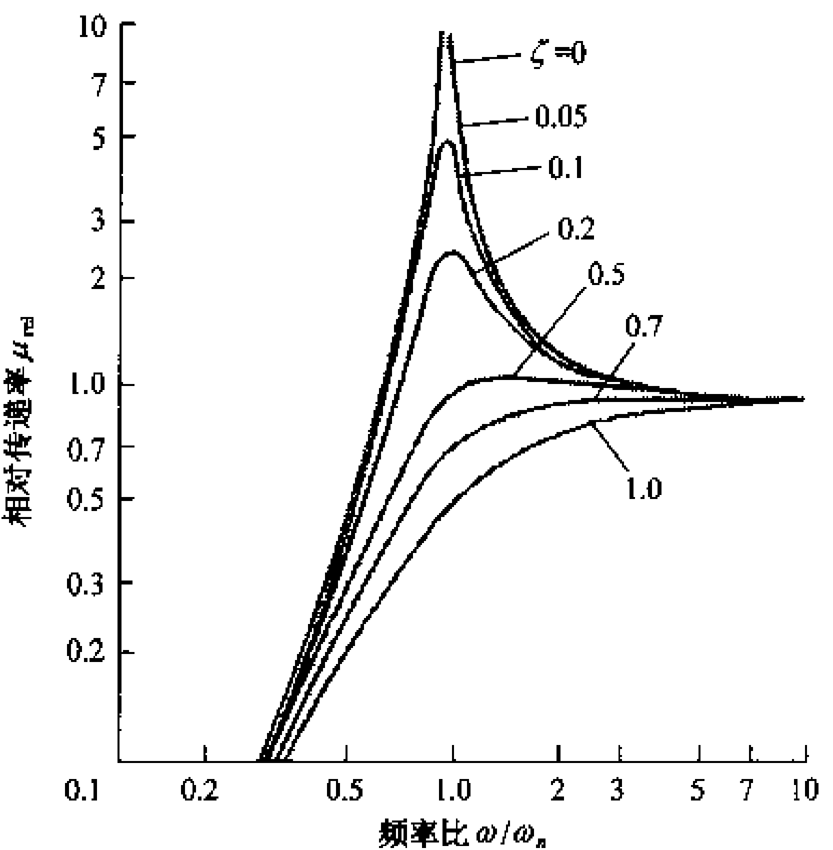


图 5－4　图 5－2(a)所示隔振系统的相对传递率

方法可以用来表示具有内摩擦或能量损耗的弹性－阻尼材料的特性，广泛采用的是复刚度描述方法。由于材料的变形相对于导致变形的应力有一个相位延迟角 β，因此，变形包括了两个部分，一个是弹性变形（和应力同相位）部分，另一个是依赖于速度的变形部分，它落后于应力 90°（π/2rad），或者沿着虚轴的方向。因此总模量可以表示为

$$G = G' + iG'' = G'[1 + i(G''/G')] = G'(1 + i\tan\beta) \tag{5-12}$$

式中：G'是弹性模量；G''是损耗模量；β 是损耗角。相应地，元件的复刚度为

$$k = k' + ik'' = k'(1 + i\tan\beta) \tag{5-13}$$

式（5－2）和式（5－3）可用复刚度表示为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k'(1 + i\tan\beta)(x_1 - x_2) = F \\ m_f\ddot{x}_2 + k'(1 + i\tan\beta)(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \tag{5-14}$$

$$\frac{mm_f}{m + m_f}\ddot{\theta} + k'(1 + i\tan\beta)\theta = \frac{m_f}{m + m_f}F \tag{5-15}$$

如果 $F = F_0 e^{i\omega t}$，则可假设 $\theta = \theta_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$，忽略 G'和 G''对幅值和频率的依赖性，得到

$$\left[-\frac{mm_f}{m + m_f}\omega^2 + k'(1 + i\tan\beta)\right]\theta_o e^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{mm_f}{m + m_f}F_o e^{i\omega t} \tag{5-16}$$

$$F_f = k'(1 + i\tan\beta)\theta = \frac{k'(1 + i\tan\beta)\dfrac{m_f}{m + m_f}}{-\dfrac{mm_f}{m + m_f}\omega^2 + k'(1 + i\tan\beta)}F_o e^{i\omega t} \tag{5-17}$$

$$\mu_F = \frac{|F_f|}{|F|} = \frac{m}{m + m_f}\sqrt{\frac{(k')^2(1 + \tan^2\beta)}{\left(k' - \frac{mm_f}{m + m_f}\omega^2\right)^2 + \tan^2\beta}}$$

$$= \frac{m_f}{m + m_f}\sqrt{\frac{1 + \tan^2\beta}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \tan^2\beta}} \qquad (5-18)$$

式中 $\omega_n = \sqrt{\frac{k'(m + m_f)}{mm_f}}$ 是角自然频率。比较式(5 - 17)和式(5 - 5)，可以得知式(5 - 17)中的$\tan\beta$对应于式(5 - 5)中的$c\omega$。因此，式(5 - 17)可以从类似于式(5 - 3)的方程推导而来，其中阻尼系数 c 依赖于频率，即 $c = (\tan\beta)/\omega$，因此

$$\psi = 2\pi\tan\beta; \quad c = \psi/2\pi\omega \qquad (5-19)$$

根据前面的假设，ψ 不依赖于振动的幅值。如果系统具有内摩擦阻尼，其自由振动衰减可以通过对数衰减率来刻画，对于给定的弹性 - 阻尼材料而言，它是一个常数值，与被隔振物体的质量无关

$$\delta = \psi/2 = \pi\tan\beta \qquad (5-20)$$

或者

$$\mu_F = \frac{m_f}{m + m_f}\sqrt{\frac{1 + \frac{\delta^2}{\pi^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{\delta^2}{\pi^2}}} \qquad (5-18a)$$

当 $F = 0$，$x_2 = x_{20}e^{i\omega t}$，$x_1 = x_{10}e^{i(\omega t + \varphi)}$ 时，对于由基础产生的“运动学激励”，系统的绝对传递率可以从式(5 - 14)的第一个式子推导出来。因此

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{k'(1 + i\tan\beta)}{-m\omega^2 + k'(1 + i\tan\beta)} \qquad (5-21)$$

$$\mu_x = \frac{|x_1|}{|x_2|} = \sqrt{\frac{k'^2(1+\tan^2\beta)}{(k'-m\omega^2)^2+k'^2\tan^2\beta}} =$$

$$\sqrt{\frac{1+\frac{\delta^2}{\pi^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{\delta^2}{\pi^2}}} \tag{5-22}$$

类似地,可以从式(5-10)中推导出相对传递率

$$\frac{\theta}{x_2} = \frac{m\omega^2}{-m\omega^2+k'(1+\mathrm{i}\tan\beta)} \tag{5-23}$$

$$\mu_{rel} = \frac{|\theta|}{|x_2|} = \sqrt{\frac{m_2\omega^4}{(k'-m\omega^2)^2+k'^2\tan^2\beta}} =$$

$$\frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{\delta^2}{\pi^2}}} \tag{5-24}$$

通过比较式(5-6)、式(5-8)和式(5-18)、式(5-22)可以看出,在后面两个式子中,由于根号里面的分子缺少了依赖于频率的项,因此,阻尼系统的高频传递率被大大降低,从而在不破坏共振行为的前提下,提高了隔振效果。在实际工程中,由于前面提到的 G'、G''对频率具有依赖性,故隔振效果的提高并不十分明显,但这种提高仍然是有意义的。根据文献[3],图 5-5 给出了当 $m_f=\infty$,具有不同阻尼(δ)、不同 G'、G''(对频率具有依赖性)的橡胶混合体的绝对传递率曲线。曲线 1 是由没有炭黑填料的天然橡胶(NR)制成的隔振器,它的阻尼很小($\delta=0.07$),当频率小于 50Hz 时,G'、G''(或者 δ)对频率的依赖性可以忽略不计,此时可以认为隔振器无阻尼。曲线 2 是含有 50% HAF 型炭黑的天然橡胶($\delta=0.31$)的绝对传递率曲线。而曲线 2′表示具有黏性阻尼的虚拟隔振器的传递率,在共振频率(5Hz)处和实际隔振器具有相同的阻尼。曲线 3 代表由含防老剂 RD 的高阻尼橡胶制成的隔振器(在

共振频率5Hz处，$\delta = 1.55$，并随着频率的增大单调递增，从1到50Hz增加3倍）。而曲线3′表示在共振频率处（5Hz）具有相同黏性阻尼的虚拟隔振器。由该图可以知道，在隔振区域$\omega/\omega_n > 1.4$内，增大迟滞阻尼与增大黏性阻尼相比，前者对隔振效果的破坏程度小。

实际工程中，具有迟滞阻尼的弹性元件（如金属丝网和橡胶等弹性元件），其刚度和阻尼的大小与振动的频率和幅值有关。由于在振动过程中，最重要的参数是隔振系统的自然频率$\omega_n = 2\pi f_n$以及共振峰的大小，因此在应用式（5－18）、式（5－18a）、式（5－22）和式（5－24）的过程中，可能需要进行几次迭代计算。其中一种方法是应用k'（或者ω_n）以及$\delta = \pi\tan\beta$等的一些实际值来计算弹性元件的变形θ。由所得到的θ值，得到新的k'和δ等，直到获得理想的收敛值。

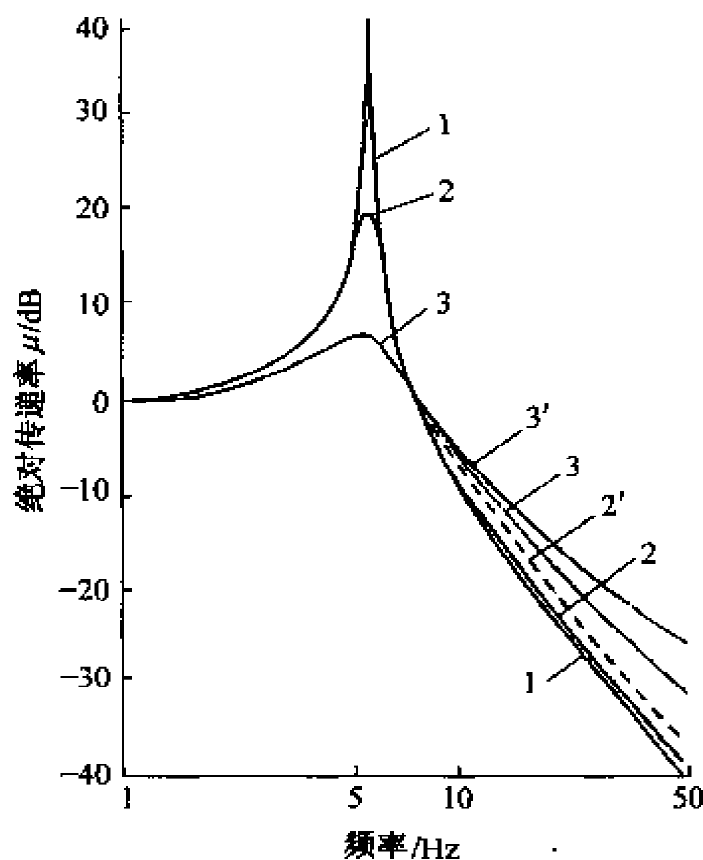


图5－5　图5－2(b)所示隔振系统在采用不同橡胶隔振器时的绝对传递率

5.2.3 带有黏性阻尼器的“松弛”隔振系统(图 5-2(c)、(d))

当 $m_f=\infty$ 时,图 5-2(c)、(d)所示系统的运动方程分别是[5]

$$\left(\frac{mc}{Nk}\right)\dddot{x}_1+m\ddot{x}_1+c\left(\frac{N+1}{N}\right)\dot{\theta}+k\theta=$$

$$F+\frac{c}{Nk}\dot{F} \tag{5-25}$$

$$\left(\frac{m\frac{c'}{k'}}{N+1}\right)\dddot{x}_1+m\ddot{x}_1+c'\left(\frac{N}{N+1}\right)\dot{\theta}+k'\left(\frac{N}{N+1}\right)\theta=$$

$$F+\left[\frac{c'}{(N+1)k'}\right]\dot{F} \tag{5-26}$$

这两个方程具有相同的形式。如果令

$$k=\left(\frac{N}{N+1}\right)k';\quad c=\left(\frac{N}{N+1}\right)^2c' \tag{5-27}$$

则式(5-25)、式(5-26)在动力学意义上等价。上式中的 N 定义如下:对图 5-2(c)而言,$N=k_1/k$,对图 5-2(d)而言,$N=k''/k'$。考虑到式(5-27),图 5-2(c)和图 5-2(d)的传递率表达式一致,且绝对传递率为

$$\mu_x=\mu_F=\sqrt{\frac{1+4\left(\frac{N+1}{N}\right)^2\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4}{N^2}\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\left(N+1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}} \tag{5-28}$$

以及相对传递率为

$$\mu_{\rm rel}=\sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+\frac{4}{N^2}\zeta^2\frac{\omega^6}{\omega_n^6}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4}{N^2}\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\left(N+1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}} \tag{5-29}$$

在式(5-28)和式(5-29)中，$\omega_n=\sqrt{k/m}$，它是当 $c=0$ 时，图5-2(c)所示系统的自然频率；$c_{cr}=2\sqrt{km}$，$\zeta=c/c_{cr}$。图5-6比较了一个刚性连接的黏性阻尼器(图5-2(a)或图5-2(c)中 $N=\infty$)和一个弹性连接的黏性阻尼器(图5-2(c)，相对阻尼 $\zeta=0.2$)的绝对传递率[6]。从图中可以看出，在隔振区域内后者的传递率随着频率的增加衰减得比前者快，前者的衰减速度仅为6dB/oct，而后者为12dB/oct，但后者使共振放大因子变大。当 $c=0$ 时，质量 m 仅由主弹簧 k 支承，传递函数和图5-2(a)所示系统相同，见式(5-6)和式(5-8)。当 $c=\infty$ 时，传递函数与式(5-6)、式(5-8)中 $c=0$ 时相同，但自然频率为 $\omega_n'=\omega_\infty=\sqrt{\frac{k+k_1}{m}}=\omega_n\sqrt{N+1}$。对于介于这两者之间的 c 而言，传递函数处于两个极限之间。使共振放大系数最小的 c 值被称为最优阻尼。在高频时，任何 c 值的传递函数都接近于 $c=\infty$ 的情况，并且绝对传递率和激励频率成反比。

共振时的放大系数(绝对传递率)μ_{res}是阻尼比 ζ 和刚度比 N 的函数，如图5-7所示[6]。当 $\zeta<\sim0.1$ 时，μ_{res}与 N 的关系不大，但 ζ 较大时，N 决定了最大的 μ_{res}。对于给定的 N，最小的 μ_{res}对应于最优的阻尼。就绝对和相对传递率而言，使 μ_{res}最小的共振频率比是不同的，它们分别是

$$\left(\frac{\omega_{res}}{\omega_n'}\right)_{abs}=\sqrt{\frac{2(N+1)}{N+2}};\ \left(\frac{\omega_{res}}{\omega_n'}\right)_{rel}=\sqrt{\frac{N+2}{2}} \qquad (5-30)$$

不管是绝对运动，还是相对运动，最优(即最小)的共振放大系数为

$$(\mu_{res})_{opt}=1+2/N \qquad (5-31)$$

但达到由式(5-31)表示的最小放大系数时的阻尼比是不同的

$$(\zeta_{opt})_{abs}=\frac{N}{4(N+1)}\sqrt{2(N+2)};$$

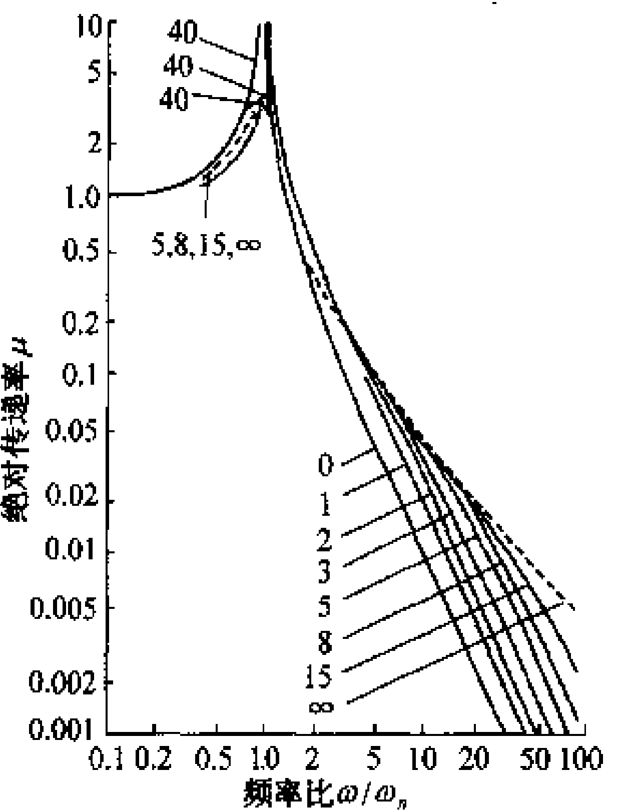


图 5-6　在图 5-2(c)所示的单轴向隔振系统中，与黏性阻尼器($\zeta=0.2$)刚性($N=\infty$)和弹性连接时系统的绝对传递率

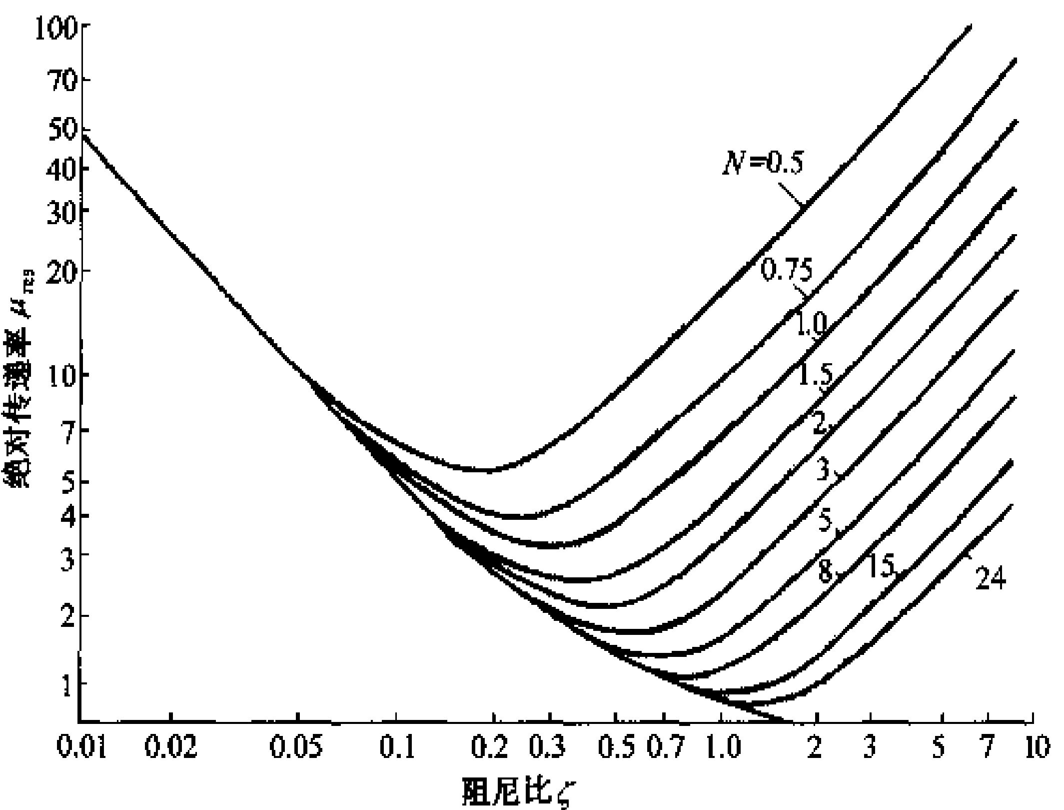


图 5-7　共振时图 5-2(c)所示系统的传递率 μ_{res} 和刚度比、阻尼比 ζ 之间的关系

$$(\zeta_{opt})_{rel} = \frac{N}{\sqrt{2(N+1)(N+2)}} \qquad (5-32)$$

达到最优阻尼时，绝对和相对传递率曲线分别如图 5－8、图 5－9所示[6]。从图中可以看出，当 N 值较小时（和阻尼器柔性连接），虽然共振放大系数比较大，但高频范围的隔振效果非常好（绝对传递率低），另一方面，较大的 N（和阻尼器刚性连接）会使 μ_{res}减小，但使得对高频振动的隔离效果变差。对相对传递率而言，N 的变化仅在共振时产生影响。文献[6]给出了不同阻尼下的传递函数，最优阻尼情况除外。

5.2.4 具有运动转换器的单自由度系统

5.2.3 节中描述的、并将在 5.3.2 节中讨论的隔振系统通过降低在激励频率处的传递率显著地提高了单自由度系统的性能，此时，系统的自然频率应远小于激励频率。因此，减小系统的自然频率看起来是一种非常直接的减小高频振动传递的方法。然而，由于较低的自然频率通常与较低的刚度以及在被支承物体重量载荷作用下产生较大的变形量相联系，因而该方法不可能隔离垂直方向（z 向）或者在垂直方向上存在分量的振动。z 向自然频率 $f_z \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\sum_j k_{z_j}/M}$，式中 $\sum_j k_{z_j}$ 为隔振系统的总垂向刚度，$M = W/g$ 为被隔振物体的质量，W 是重量，g 是重力加速度，因此可以得到

$$f_z = \sqrt{k_z/M} = \sqrt{k_z g/W} = \sqrt{g/\Delta} \approx \frac{3}{\sqrt{\Delta}} \qquad (5-33)$$

式中：Δ 为被隔振物体重量作用下弹簧的变形量，单位是 cm；f_z 单位为 Hz。因此，f_z = 3Hz 时，要求产生的变形为 1cm = 10mm，f_z = 1Hz 时要求变形为 9cm = 90mm。这种大变形使得系统容易出现大幅度运动（包括平动和摆动），特别是当被隔振物体很轻时情况更是如此。此时弹簧的绝对刚度很小。在许多情况下，这种由于弹簧元件的低刚度（低自然频率）而产生的“不稳定”现象也可以

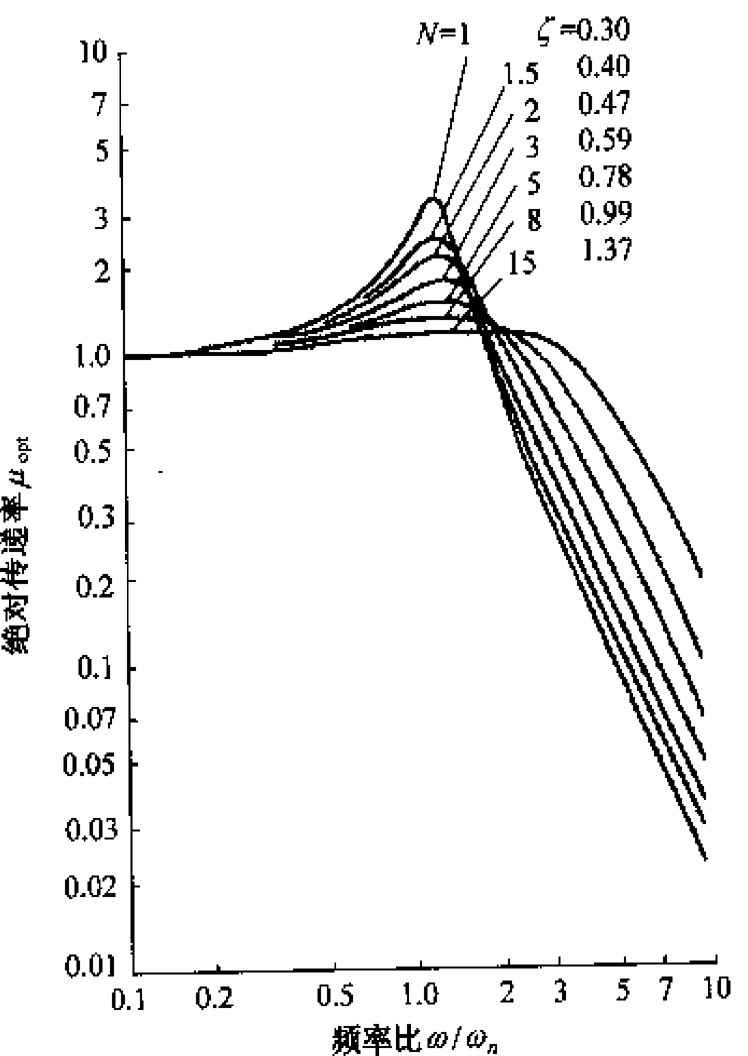


图 5－8　图 5－2(c)所示系统在最佳阻尼比时的绝对传递率

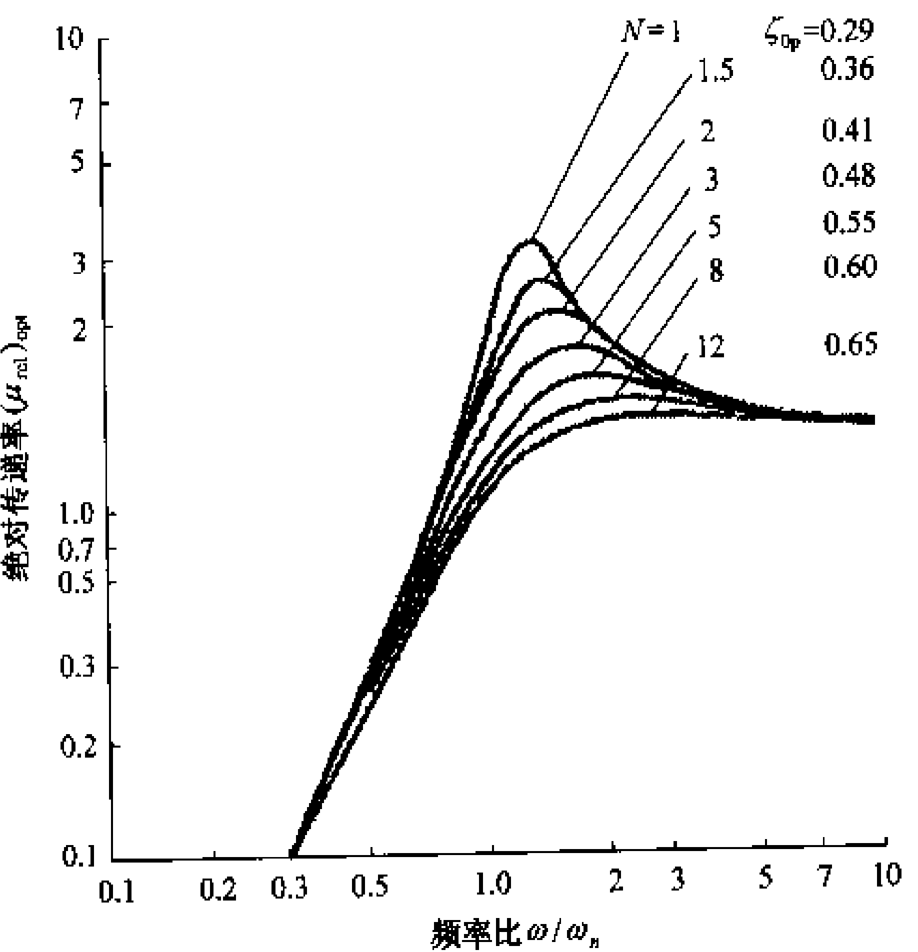


图 5－9　图 5－2(c)所示系统在最佳阻尼比时的相对传递率

发生在水平 x、y 方向，但没有垂直方向那么严重。这里所采用的稳定一词并非其字面意思，而是指被隔振物体产生的位移相对较小。当被动隔振系统必须满足这种低自然频率的要求时，被隔振物体必须安装在一块价格昂贵且笨重的"惯性质量块"（通常由钢筋混凝土制成）上来人为地增大其质量。因此，与之相连接的弹簧的刚度需要成比例的增加，以保证系统的稳定性。

为了减小垂直（或者水平）方向上的自然频率，可以引入"虚惯性"元件，从而使质量较小的被隔振物体也可以采用刚度较大的弹簧。采用运动转换系统或者"运动转换器"也可以达到相同的效果。典型的运动转换系统如图 5－10 所示，该系统包括质量为 m 的被隔振物体 1、隔振器（弹簧）2、阻尼器 3 以及由飞轮—螺母 4 组成的运动转换器。运动转换器与被隔振物体 1 具有相同的垂向位移，在推力轴承 5 的支承下，相对于被隔振物体 1 作旋转运动。飞轮 4 通过螺杆与上下振动的基座 7 相连接。由于飞轮的惯性以及螺纹连接（4、6）的摩擦力，使得运动转换器能产生附加的动态力。

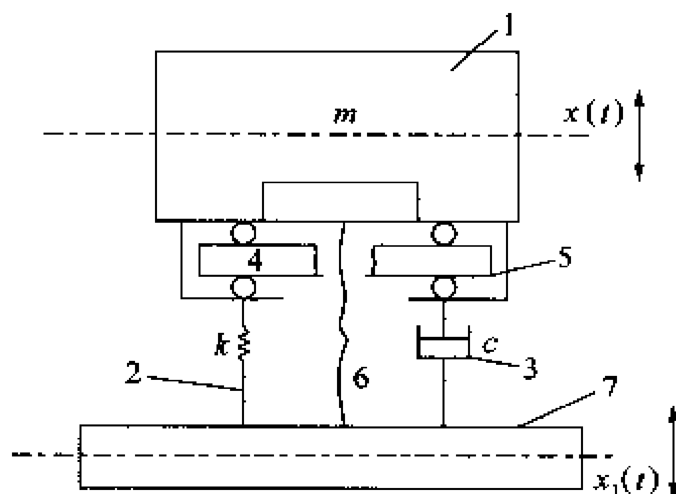


图 5－10　具有运动转换能力的隔振系统

当被隔振物体 1 沿垂向运动时，迫使飞轮 4 转动。被隔振物体施加于飞轮的垂向力必须克服飞轮的惯性转矩 $T = I\ddot{\varphi}$，其中 φ 是飞轮的转角，$\ddot{\varphi}$ 是角加速度。因此产生的垂向力为

$$P = T/r\tan(\alpha \pm \gamma) = \frac{I\ddot{\varphi}}{r\tan(\alpha \pm \gamma)} \qquad (5-34)$$

式中：I 是飞轮的惯性矩；α 是螺杆的螺旋升角；r 为螺杆的中径；γ 是摩擦角。螺杆的摩擦系数 $f = \tan\gamma$，其符号由螺杆的滑行方向确定，“负号”表示趋向平衡位置运动，“正号”表示离开平衡位置运动。因此，趋向和离开平衡位置这两个阶段的运动可用如下两个方程分别进行描述

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx + c\dot{x} + \dfrac{I\ddot{\varphi}}{r\tan(\alpha - \gamma)} = kx_1 + c\dot{x}_1 \\ m\ddot{x} + kx + c\dot{x} + \dfrac{I\ddot{\varphi}}{r\tan(\alpha + \gamma)} = kx_1 + c\dot{x}_1 \end{cases} \qquad (5-35)$$

由于螺旋副存在如下运动学关系：$\varphi = \dfrac{x - x_1}{r\tan\alpha}$，因此上式变为

$$\begin{cases} \left[m + \dfrac{I}{r^2\tan(\alpha - \gamma)\tan\alpha}\right]\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \dfrac{I}{r^2\tan(\alpha - \gamma)\tan\alpha}\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 \\ \left[m + \dfrac{I}{r^2\tan(\alpha + \gamma)\tan\alpha}\right]\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \dfrac{I}{r^2\tan(\alpha + \gamma)\tan\alpha}\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 \end{cases}$$

$$(5-36)$$

只有当螺杆上的摩擦力非常小时，运动转换系统才具实际意义（如使用滚珠螺旋），因此可以假设 $\gamma \approx 0$。这样只需保留一个运动方程

$$\left[m + \frac{I}{r^2\tan^2\alpha}\right]\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{I}{r^2\tan^2\alpha}\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1$$

$$(5-37)$$

中括号里的表达式是被隔振物体的有效质量，其中第二项 $m' = (I/r^2\tan^2\alpha)$ 是飞轮的“贡献”。正是由于有了该项，带运动转换器

的系统才具有与其它系统不同的特征。对于较小的 r 和 α(如市场上可以买到的滚珠螺旋),即使飞轮非常小,m' 也可以比 m 大 1～2个数量级。此时系统的自然频率为

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \dfrac{I}{r^2\tan^2\alpha}}} \tag{5-38}$$

当 k 很大时,该值仍然可以非常小。

根据式(5-37),得到该系统的传递率为

$$\mu = \frac{|x|}{|x_1|} = \sqrt{\frac{(1-\eta\Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}{[1-(1+\eta)\Omega^2]^2 + 4n^2\Omega^2}} \tag{5-39}$$

式中:$\Omega = \omega/\omega_0$,其中 ω_0 为无运动转换器时系统的自然频率,$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{k/m}$;$c/m = 2n$,$\eta = m'/m$,如果 $\eta = 0$,式(5-39)和式(5-8)等价。如果 $c = n = 0$,式(5-39)中 μ 的绝对值为

$$|\mu| = \frac{|1-\eta\Omega^2|}{|1-(1+\eta)\Omega^2|} \tag{5-40}$$

图 5-11 为 $\eta = 0.33$ 时 $\mu(\Omega)$ 的曲线。当 $c = n = 0$(曲线 1),系统在 $\Omega_1^2 = 1/(1+\eta)$ 处有很尖的共振峰。在 $\Omega_2^2 = 1/\eta$ 处,传递率为 0。因此,根据式(5-38)知道,系统的自然频率比没有运动转换器时要低得多,并且在频率比 Ω_2 处,它还具有动力吸振效应。该效应对两自由度系统来说是非常普遍的,但在单自由度系统中并不常见。从式(5-40)易知,随着频率比从 Ω_2 增加到 $\Omega = \infty$,系统传递率逼近

$$\mu_\infty = \eta/(1+\eta) \tag{5-41}$$

当系统中存在阻尼时($c > 0$),共振峰会降低,但也不会吸收所有的振动(虽然渐进线的位置不变)。如图 5-11 中的曲线 2 所示。

前面的研究表明,具有运动转换器的隔振系统在不减小弹簧刚度的情况下能实现较低的自然频率,因而可以得到自然频率较小、稳定的隔振系统。然而,由于这种隔振系统的振动传递率并非随频

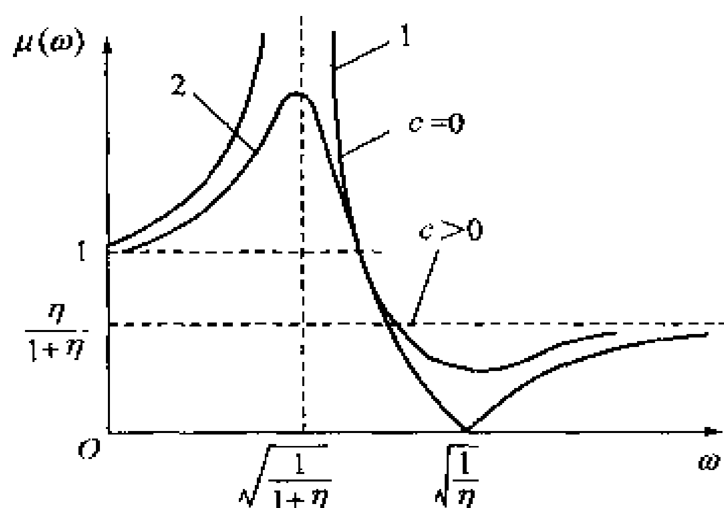


图 5-11　当 $m'=m/3$ 以及不同阻尼时，图 5-10 所示系统的传递率
（曲线 1—$c=0$；曲线 2—$c>0$）

率比的增加单调递减，而是趋向于 $\eta/(\eta+1)$，所以得到的隔振效果并没有传统的隔振系统好（如图 5-3(a) 中自然频率小的隔振系统）。同时，"动态吸振"的效果也受到限制。这是因为动态吸振总是发生在共振频率附近（特别是 η 值很大的时候），并且由于系统中总是存在阻尼，使得这种效果并不十分明显。但图5-11所示的系统仍可有效地使用。当 $c=0$ 时，图 5-12 中对三个不同 η 值的传递率进行了比较。虽然自然频率随着 η 的增加而减小，但由式(5-41)可知，渐近线的值随着 η 的增加而增加。对较大的 η 而言，

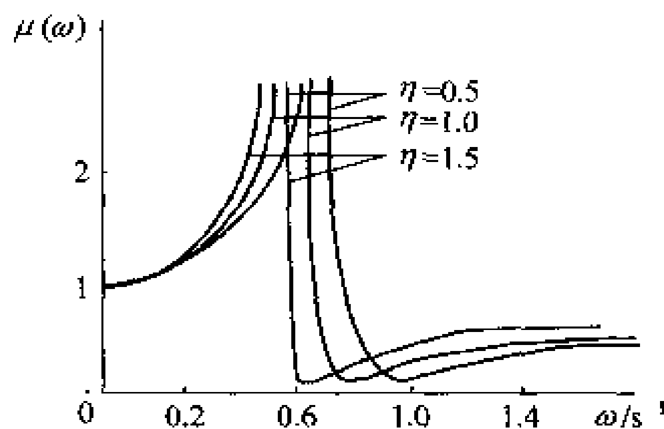


图 5-12　图 5-10 所示系统在不同
$\eta(\eta=m'/m)$ 和 $c=0$ 时的传递率

系统的自然频率甚至在隔振器刚度很大的情况下也可以做得很小，但另一方面，渐近线的高度将趋向于$\mu=1$，因而系统不能够实现隔振的目的。然而，就相对较小的η值而言，它可以使系统的自然频率明显减小，并使整个频率范围(从低频开始)内的传递率μ显著降低。从式(5-40)可知，当频率比Ω大于

$$\Omega_3=\sqrt{\frac{2}{1+2\eta}} \tag{5-42}$$

时，系统才开始具有隔振效果($\mu<1$)。

当频率比Ω等于

$$\Omega_4=\sqrt{\frac{1+2\eta}{2(\eta+\eta^2)}} \tag{5-43}$$

传递率曲线穿过渐近线。

下面是一个算例。设$\eta=1$时，即有效质量$m+m'=2m$，系统的自然频率减小到原来的$1/\sqrt{2}$。但传递率μ不大于$\eta/(\eta+1)=0.5$。对自然频率$f_n=5\text{Hz}$的传统隔振系统而言，只有当激励频率大于$f=5\times1.41\approx7.0\text{Hz}$时系统才开始有隔振效果；当激励频率大于$f=8.66\text{Hz}$时，传递率减小为0.5。当$\eta=1$且隔振系统具有运动转换器时，从$f=4.08\text{Hz}$开始起到隔振效果；当$f=4.33\text{Hz}$时，传递率曲线穿过$\mu=0.5$。因此飞轮的存在使得开始产生隔振效果的频率明显降低。在很多工程应用中，将低频范围内的振动

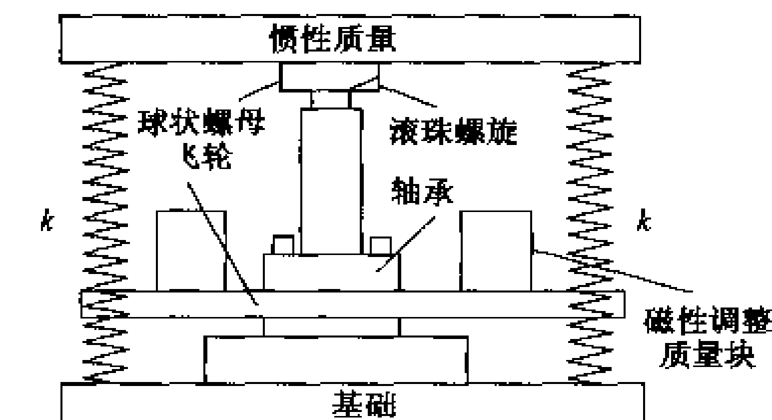


图 5-13　具有运动转换器的隔振系统

传递率减小一半便可满足隔振要求了。同时，具有很大“虚质量”的运动转换系统能够取代隔振系统中一些昂贵且笨重的基础。在工程实际中，可以采用优化的方法来确定如何减小 f_n。图 5 - 13 所示为 $\eta=400$ 时的隔振系统。

5.3 两自由度隔振系统的动态特性

5.3.1 有阻尼两自由度系统的一般形式

图 5 - 14(a)所示的三质量块两自由度系统在各种隔振系统的建模中起着非常重要的作用。为了便于分析，将系统分解为两个两质量块的子系统，如图 5 - 14(b)所示。对这些子系统之间的相互作用进行分析，可以非常清楚地了解图 5 - 14(a)所示系统动态过程的物理意义，图 5 - 14 中系统的运动方程可以写为

$$\left.\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1+c_{12}(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_{12}(x_1-x_2)=F_1(t)\\
&m_2\ddot{x}_2+c_{12}(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_{12}(x_2-x_1)+c_{23}(\dot{x}_2-\dot{x}_3)+\\
&\qquad\qquad k_{23}(x_2-x_3)=F_2(t)\\
&m_3\ddot{x}_3+c_{23}(\dot{x}_3-\dot{x}_2)+k_{23}(x_3-x_2)=F_3(t)
\end{aligned}\right\}\tag{5-44}$$

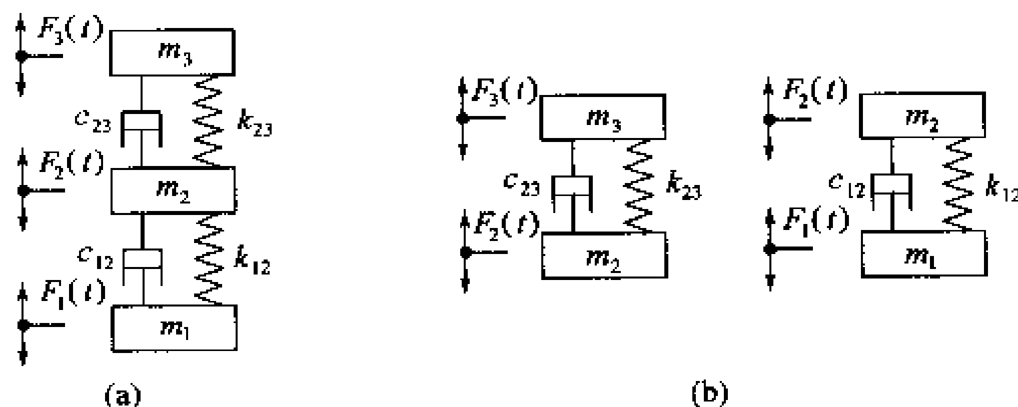


图 5 - 14 两自由度系统及其子系统

这个系统看上去是一个三自由度系统，但实际上存在一个不重要的“零”模态（自然频率为零）。将上式中的坐标变换为相对坐标 $\theta_1 = x_1 - x_2$ 和 $\theta_2 = x_2 - x_3$ 可以消除这个零模态。第一个方程和第三个方程均乘以 m_2，然后各自减去分别乘以 m_1 和 m_3 后的第二个方程，得

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\theta}_1 + c_{12}\dot{\theta}_1 + k_{12}\theta_1 - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}c_{23}\dot{\theta}_2 - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}k_{23}\theta_2 \\ \qquad = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}F_1 - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}F_2 \\ \dfrac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}\ddot{\theta}_2 + c_{23}\dot{\theta}_2 + k_{23}\theta_2 - \dfrac{m_3}{m_2 + m_3}c_{12}\dot{\theta}_1 - \dfrac{m_3}{m_2 + m_3}k_{12}\theta_1 \\ \qquad = -\dfrac{m_3}{m_2 + m_3}F_2 + \dfrac{m_2}{m_2 + m_3}F_3 \end{cases} \tag{5-45}$$

或者，利用弹性连接产生的力 $F_{12} = k_{12}\theta_1$、$F_{23} = k_{23}\theta_2$，有

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dfrac{1}{k_{12}}\ddot{F}_{12} + \dfrac{c_{12}}{k_{12}}\dot{F}_{12} + F_{12} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\dfrac{c_{23}}{k_{23}}\dot{F}_{23} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}F_{23} \\ \qquad = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}F_1 - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}F_2 \\ \dfrac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}\dfrac{1}{k_{23}}\ddot{F}_{23} + \dfrac{c_{23}}{k_{23}}\dot{F}_{23} + F_{23} - \dfrac{m_3}{m_2 + m_3}\dfrac{c_{12}}{k_{12}}\dot{F}_{12} - \dfrac{m_3}{m_2 + m_3}F_{12} \\ \qquad = -\dfrac{m_3}{m_2 + m_3}F_2 + \dfrac{m_2}{m_2 + m_3}F_3 \end{cases} \tag{5-46}$$

为了将式(5－46)表示成规范形式，使得在两个方程中均具有相等的弹性耦合系数，可以将第一个方程乘以 $m_3/(m_2 + m_3)$，第二个方程乘以 $m_1/(m_1 + m_2)$，得

$$
\begin{cases}
\dfrac{m_1 m_2 m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}\dfrac{1}{k_{12}}\ddot{F}_{12}+\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}\dfrac{c_{12}}{k_{12}}\dot{F}_{12}+ \\
\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}F_{12}-\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}\dfrac{c_{23}}{k_{23}}\dot{F}_{23}- \\
\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}F_{23}=\dfrac{m_2}{(m_1+m_2)}\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}F_1- \\
\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}F_2 \\
\dfrac{m_1 m_2 m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}\dfrac{1}{k_{23}}\ddot{F}_{23}+\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dfrac{c_{23}}{k_{23}}\dot{F}_{23}+\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}F_{23}- \\
\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}\dfrac{c_{12}}{k_{12}}\dot{F}_{12}-\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}F_{12}= \\
-\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dfrac{m_3}{(m_2+m_3)}F_2+\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}\dfrac{m_2}{(m_2+m_3)}F_2
\end{cases}
\tag{5-47}
$$

为了简化方程，引入下列标记：

——广义质量(惯量)

$\beta_{11}=[m_1 m_2 m_3/(m_1+m_2)(m_2+m_3)]/k_{12}$；

$\beta_{22}=[m_1 m_2 m_3/(m_1+m_2)(m_2+m_3)]/k_{23}$。

——广义刚度

$\alpha_{11}=m_2/(m_2+m_3)$；

$\alpha_{22}=m_1/(m_1+m_2)$。

——弹性(坐标)耦合系数

$\alpha_{12}=\alpha_{23}=-m_1 m_3/(m_1+m_2)(m_2+m_3)$。

——广义阻尼系数

$\xi_{11}=[m_3/(m_2+m_3)]c_{12}/k_{12}$；

$\xi_{22}=[m_1/(m_1+m_2)]c_{23}/k_{23}$。

——阻尼(一阶微分)耦合系数

$\xi_{12}=[m_1/(m_1+m_2)][m_3/(m_2+m_3)]c_{12}/k_{12}$；

$\xi_{23}=-[m_1/(m_1+m_2)][m_3/(m_2+m_3)]c_{23}/k_{23}$。

——广义激励力

$F'_1=[m_2/(m_1+m_2)][m_3/(m_2+m_3)]F_1-[m_1/(m_1+m_2)][m_3/(m_2+m_3)]F_2$；

$F'_2=-[m_1/(m_1+m_2)][m_3/(m_2+m_3)]F_2+[m_1/(m_1+m_2)][m_2/(m_2+m_3)]F_3$。

——广义的无量纲弹性耦合系数

$\gamma=\sqrt{\alpha_{12}^2/\alpha_{11}\alpha_{22}}=\sqrt{m_1m_3/(m_1+m_2)(m_2+m_3)}$。

——子系统的阻尼比

$c_{12}/(c_{cr})_{1p}=c_{12}/[2n_1m_1m_2/(m_1+m_2)]=\xi_{11}/(2n_1\beta_{11})$；

$c_{23}/(c_{cr})_{2p}=c_{23}/[2n_2m_2m_3/(m_2+m_3)]=\xi_{22}/(2n_2\beta_{22})$。

——图 5－14(b)所示子系统的自然角频率

$n_1=\sqrt{[(m_1+m_2)/m_1m_2]k_{12}}=\sqrt{\alpha_{11}/\beta_{11}}$；

$n_2=\sqrt{[(m_2+m_3)/m_2m_3]k_{23}}=\sqrt{\alpha_{22}/\beta_{22}}$。

子系统之间的相互动态作用可以很方便地通过耦合系数表示出来[7]

$$\sigma=2\gamma\frac{n_1n_2}{|n_1^2-n_2^2|}=2\gamma\frac{\frac{n_2}{n_1}}{\left|1-\frac{n_2^2}{n_1^2}\right|} \tag{5-48}$$

图 5－15 所示为 σ/γ 与 n_1/n_2 之间的关系。应该注意的是 $\sigma(n_2/n_1)=\sigma(n_1/n_2)$。

σ 越大，则各子系统之间的相互作用越强。当 σ 非常小时，图 5－14(b)中子系统的动态过程是相互独立的，因此每个子系统可以分开单独进行分析。此时，图 5－14(a)所示系统的两个自然频率非常接近于单个子系统的自然频率。当单个自然频率 n_1 和 n_2 以及系数 σ 已知时，图 5－16 给出了图 5－14(a)所示的三质量系统的自然频率 ω_{n1} 和 ω_{n2}。

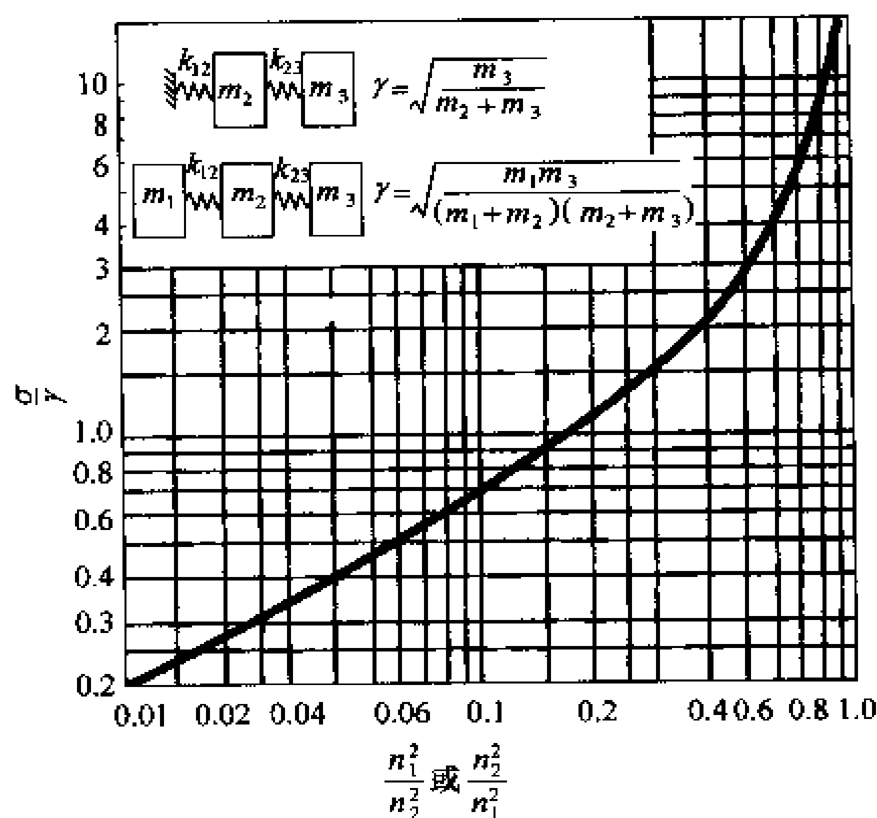


图 5－15 耦合系数 σ 和图 5－14 所示系统的自然频率比之间的关系

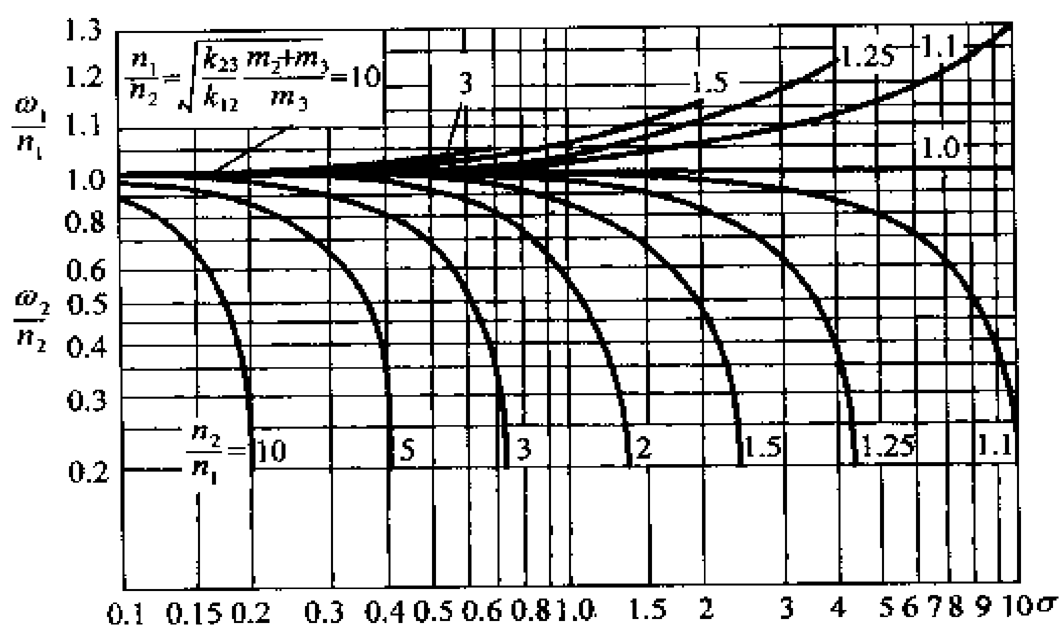


图 5－16 图 5－14(a)所示系统的自然频率 ω_n 与耦合系数 σ 以及 n_1/n_2 之间的关系

假设式(5－47)在激励力为零时的解为 $F_{12}=F_{01}e^{\lambda t}$、$F_{23}=F_{02}e^{\lambda t}$,那么其特征方程变为

$$(\beta_{11}\lambda^2+\xi_{11}\lambda+\alpha_{11})(\beta_{22}\lambda^2+\xi_{22}\lambda+\alpha_{22})-(\xi_{12}\lambda+\alpha_{12})(\xi_{23}\lambda+\alpha_{23})=0 \qquad (5-49)$$

如果各个子系统中的阻尼非常小,或者[见式(5－4)]

$$\frac{c_{12}}{(c_{cr})_{1p}}=\frac{\xi_{11}}{2\beta_{11}}\frac{1}{n_1}=\frac{\Delta_{1p}}{n_1}\ll 1,\quad \frac{c_{23}}{(c_{cr})_{2p}}=\frac{\xi_{22}}{2\beta_{22}}\frac{1}{n_2}=\frac{\Delta_{2p}}{n_2}\ll 1$$

式中:Δ_{1p}、Δ_{2p}为子系统的相对阻尼系数。那么阻尼耦合不是非常明显,并且由于 $\alpha_{12}=\alpha_{23}$,或

$$(\lambda^2+2\Delta_{1p}\lambda+n_1^2)(\lambda^2+2\Delta_{2p}\lambda+n_2^2)-\gamma^2n_1^2n_2^2=0 \qquad (5-50)$$

则式(5－49)可写为

$$(\beta_{11}\lambda^2+\xi_{11}\lambda+\alpha_{11})(\beta_{22}\lambda^2+\xi_{22}\lambda+\alpha_{22})-\alpha_{12}^2=0 \qquad (5-51)$$

因为假设了系统(或者其独立的子系统)中阻尼很小,所以

$$\lambda_{1,2}\approx i\omega_{1,2}-\Delta_{1,2} \qquad (5-52)$$

式中:$\omega_{1,2}$是图5－14(a)所示系统无阻尼时的自然频率;$\Delta_{1,2}$是系统各振动模态的相对阻尼系数。将式(5－52)代入式(5－50),略去小量 $\Delta_{1,2}^2$,$\Delta_{1,2}\Delta_{1p}$,$\Delta_{1,2}\Delta_{2p}$,并考虑到 ω 是无阻尼频率方程的解,因此

$$(n_1^2-\omega^2)(n_2^2-\omega^2)-\gamma^2n_1^2n_2^2=0 \qquad (5-53)$$

可以写出关于 $\Delta_{1,2}$的方程

$$(n_1^2-\omega^2)\Delta_{2p}+(n_2^2-\omega^2)\Delta_{1p}-(n_1^2-n_2^2-2\omega^2)\Delta_{1,2}=0 \qquad (5-54)$$

将式(5－53)中求出的 $\omega_{1,2}$ 代入式(5－54),并考虑到式(5－48),得

$$
\begin{cases}
\Delta_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+\sqrt{1+\sigma^2})\Delta_{1p} - (1-\sqrt{1+\sigma^2})\Delta_{2p}}{\sqrt{1+\sigma^2}} \\
\Delta_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{-(1-\sqrt{1+\sigma^2})\Delta_{1p} + (1+\sqrt{1+\sigma^2})\Delta_{2p}}{\sqrt{1+\sigma^2}}
\end{cases}
\tag{5-55}
$$

Δ_1、Δ_2 的值确定了各个共振模态中的对数衰减率 $\delta_{12} = 2\pi(\Delta_{1,2}/\omega_{1,2})$ 以及共振放大因子 $\mu_{1,2} = \omega_{1,2}/2\Delta_{1,2}$。$\Delta_{1,2}$、$\Delta_{1p}$，$\Delta_{2p}$ 和 σ 之间的关系如图 5－17 所示。

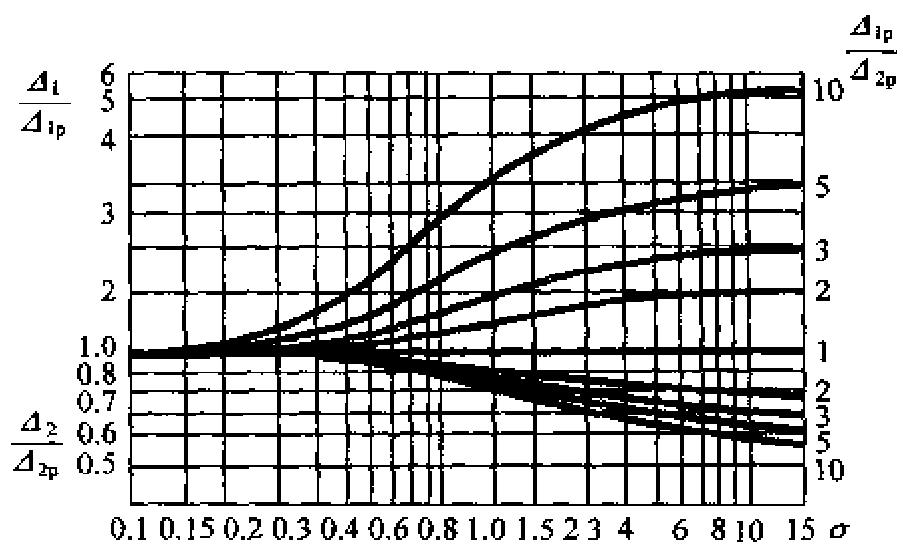


图 5－17　图 5－14(a)所示两自由度系统的相对阻尼系数 Δ_1、Δ_2 与子系统的阻尼系数 Δ_{1p}、Δ_{2p} 以及耦合系数 σ 之间的关系

三质量系统的重要特性是，当自然频率为 ω_1 和 ω_2（产生弹性力的模态系数）时，两个弹性连接 k_{12} 和 k_{23} 之间弹性力的分布 $K_1 = (F_{23}/F_{12})_{\omega_{1n}}$、$K_2 = (F_{23}/F_{12})_{\omega_{2n}}$。这些系数主要也是由 σ 确定的。根据式(5－49)可得

$$
K_{1,2} = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}}\frac{1 \mp \sqrt{1+\sigma^2}}{2\sigma} = \sqrt{\frac{k_{23}}{k_{12}}}\frac{1 \mp \sqrt{1+\sigma^2}}{2\sigma}
\tag{5-56}
$$

由这些表达式可以作出图 5－18。从图中可以看出，当 σ 值较小时，由于 $K_1 \gg 1$（$K_2 \ll 1$），所以共振现象只在一个子系统中产生。

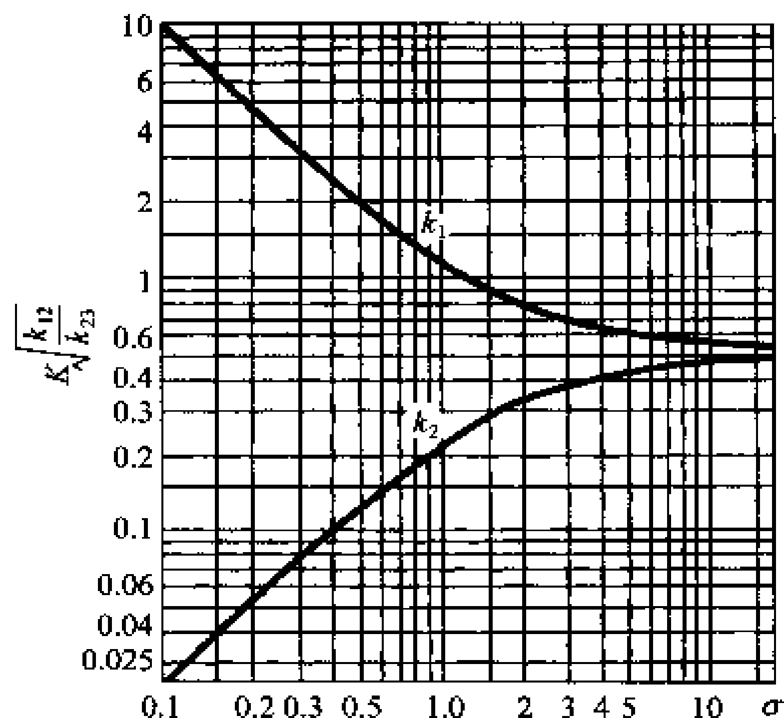


图 5－18　图 5－14(a)所示系统的模态系数和 σ 之间的关系

对于某些情况，例如，为了确定脉冲激励的响应，将式(5－47)转换成正则坐标 $\widetilde{F}_1$ 和 $\widetilde{F}_2$ 非常有益。以激励力作为坐标，图5－14(a)所示系统的 Lagrange 函数可以写成

$$L = T - \Pi + \sum_{j=1,2} F'_j(t) F_{j,j+1}$$

$$= \frac{1}{2}\beta_{11}\dot{F}_{12}^2 + \frac{1}{2}\beta_{22}\dot{F}_{23}^2 - \frac{1}{2}\alpha_{11}F_{12}^2 - \frac{1}{2}\alpha_{22}F_{23}^2 - \frac{1}{2}\alpha_{12}F_{12}F_{23} + F'_1(t)F_{12} + F'_2(t)F_{23} \tag{5-57}$$

式中：T 是动能；Π 是势能。考虑到

$$F_{12} = \widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2,\quad F_{23} = K_1\widetilde{F}_1 + K_2\widetilde{F}_2 \tag{5-58}$$

同时还考虑到在正则坐标中，动能和势能都能写成平方和的形式，由此可得

$$L = \frac{1}{2}\beta_1\dot{\widetilde{F}}_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2\dot{\widetilde{F}}_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_1\widetilde{F}_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_2\widetilde{F}_2^2 +$$

$$F'_1(t)(\widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2) + F'_2(t)(K_1\widetilde{F}_1 + K_2\widetilde{F}_2) \tag{5-59}$$

式中：α 和 β 是在正则坐标中的广义刚度和惯性。系统的 Lagrange 运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widetilde{F}}_j} = \frac{\partial L}{\partial \widetilde{F}_j} \qquad (j = 1,2) \tag{5-60}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \beta_1 \ddot{\widetilde{F}}_1 + \alpha_1 \widetilde{F}_1 &= F'_1(t) + K_1 F'_2(t) \\ \beta_2 \ddot{\widetilde{F}}_2 + \alpha_2 \widetilde{F}_2 &= F'_1(t) + K_2 F'_2(t) \end{aligned} \tag{5-61}$$

由于 $\alpha_1/\beta_1 = \omega_{n1}^2$、$\alpha_2/\beta_2 = \omega_{n2}^2$，式(5－61)可以改写为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\omega_{n1}^2}\ddot{\widetilde{F}}_1 + \widetilde{F}_1 = \dfrac{1}{\alpha_1}[F'_1(t) + K_1 F'_2(t)] \\ \dfrac{1}{\omega_{n2}^2}\ddot{\widetilde{F}}_2 + \widetilde{F}_2 = \dfrac{1}{\alpha_2}[F'_1(t) + K_2 F'_2(t)] \end{cases} \tag{5-62}$$

式中

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\dfrac{m_3}{m_2 + m_3}K_1^2 - 2\dfrac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}K_1 = \\ \qquad \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left\{\left[\omega_1^2 - \dfrac{m_1 m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3)}\right]^2 + \dfrac{m_3}{m_1}\dfrac{m_1 m_2 m_3}{m_2 + m_3}\right\} \\ \alpha_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\dfrac{m_3}{m_2 + m_3}K_2^2 - 2\dfrac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}K_2 = \\ \qquad \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left\{\left[\omega_2^2 - \dfrac{m_1 m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3)}\right]^2 + \dfrac{m_3}{m_1}\dfrac{m_1 m_2 m_3}{m_2 + m_3}\right\} \end{cases} \tag{5-63}$$

应用前面确定的相对阻尼系数 Δ_1、Δ_2，可以将式(5－62)改写成有阻尼的形式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\omega_{n1}^2}\ddot{\widetilde{F}}_1 + 2\dfrac{\Delta_1}{\omega_{n1}^2}\dot{\widetilde{F}}_1 + \widetilde{F}_1 = \dfrac{1}{\alpha_1}[F'_1(t) + K_1F'_2(t)] \\ \dfrac{1}{\omega_{n2}^2}\ddot{\widetilde{F}}_2 + 2\dfrac{\Delta_1}{\omega_{n2}^2}\dot{\widetilde{F}}_2 + \widetilde{F}_2 = \dfrac{1}{\alpha_2}[F'_1(t) + K_2F'_2(t)] \end{cases} \tag{5-64}$$

上式描述了两个独立(解耦)系统的运动情况。在式(5－47)变换为(5－64)的过程中忽略了阻尼耦合系数，该系数只有当某个子系统中的阻尼在临界阻尼中占有很大比重时，才比较显著。当 $\widetilde{F}_1$ 和 $\widetilde{F}_2$ 确定后(如在脉冲激励的情况下)，可以根据式(5－58)以图解法或者解析法求出弹性连接上的实际作用力。

5.3.2 具有中间质量块的隔振器

如果质量 m_3 非常大($m_3\approx\infty$)，质量 m_1 表示被隔振物体，那么图 5－14(a)中的系统 k_{12}—m_2—k_{23} 表示具有中间质量块的隔振器(双层隔振器)。由于惯性力与弹性元件 k_{12}、k_{23} 产生的振动相互作用，从而使得隔振器在高频范围内具有更好的隔振效果。应用式(5－53)可以计算出无阻尼时隔振系统的两个自然频率

$$\omega_{1,2} = n_1\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{n_2^2}{n_1^2}+1+\frac{k_{23}}{k_{12}}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{n_2^2}{n_1^2}+1+\frac{k_{23}}{k_{12}}\right)^2 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}} \tag{5-65}$$

式中：$n_1=\sqrt{(k_{12}+k_{23})/m_2}$ 表示当 m_1 固定时子系统的自然频率；$n_2=\sqrt{[k_{12}k_{23}/(k_{12}+k_{23})]/m_1}$ 则表示当 $m_2=0$ 时单个子系统的自然频率。在式(5－65)中，自然频率 ω_1 比 n_1、n_2 小(由于存在负号)，而 ω_2 比 n_1、n_2 大(由于存在正号)。

力和位移的绝对传递率（不考虑阻尼）为

$$\mu = \frac{1}{\frac{n_1^2}{n_2^2}\left(\frac{\omega}{n_1}\right)^4 - \left[1 + \left(1 + \frac{k_{23}}{k_{12}}\right)\frac{n_1^2}{n_2^2}\right]\left(\frac{\omega}{n_1}\right)^2 + 1} \tag{5-66}$$

由于激励频率 $\omega \gg n_1, n_2$，所以 $\mu \to (n_1 n_2/\omega^2)^2$。因此，在高频激励下，传递率以激励频率的 4 次方减小（见图 5－19），而对简单的隔振器来说，传递率只以激励频率的 2 次方下降，参见式（5－6）、式（5－8）和式（5－11）。另一方面，在两个自然频率 ω_1、ω_2 处具有很高的传递率，而不同于简单隔振器只在一个共振频率处具有较高的传递率。因此，当刚度比为 $\alpha = k_2/k_1 = 1 + \beta$（其中 $\beta = m_2/m_1$）时，频率比 ω_2/ω_1 最小（即 ω_2 非常接近于 ω_1），这是非常有利的。在这种刚度比下，有[3]

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + \sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{\beta}} \tag{5-67}$$

以及力的传递率为

$$\mu_F = \frac{1 + \delta^2/\pi^2}{\sqrt{\left(\frac{\beta\lambda\Omega^4}{2 + \beta} - 2\lambda\Omega^2 + 1 - \delta^2/\pi^2\right)^2 + (2\delta/\pi)^2(1 - \lambda\Omega^2)^2}} \tag{5-68}$$

式中：$\lambda = (1 + \beta)/(2 + \beta)$，$\delta$ 为对数衰减率（假设对 k_{12} 和 k_{23} 而言都是相等的），以及 $\Omega = \omega_1/n_1$。当激励力为高频且 $\beta \leqslant 0.5$ 时，有

$$\mu_F = \frac{(1 + \delta^2/\pi^2)(2 + \beta)^2}{\beta(1 + \beta)\Omega^4} \approx \frac{4(1 + \delta^2/\pi^2)}{\beta\Omega^4} \tag{5-69}$$

或者传递率和中间质量 m_2 成反比。

具有不同中间质量（$\beta = 0.1; 0.2; 1.0$）的小阻尼系统的传递率曲线如图 5－19 所示，在该图中还与传统的隔振系统 $\beta = 0$ 进行了比较[3]。虽然引入中间质量块对高频振动的隔离来说，优点显

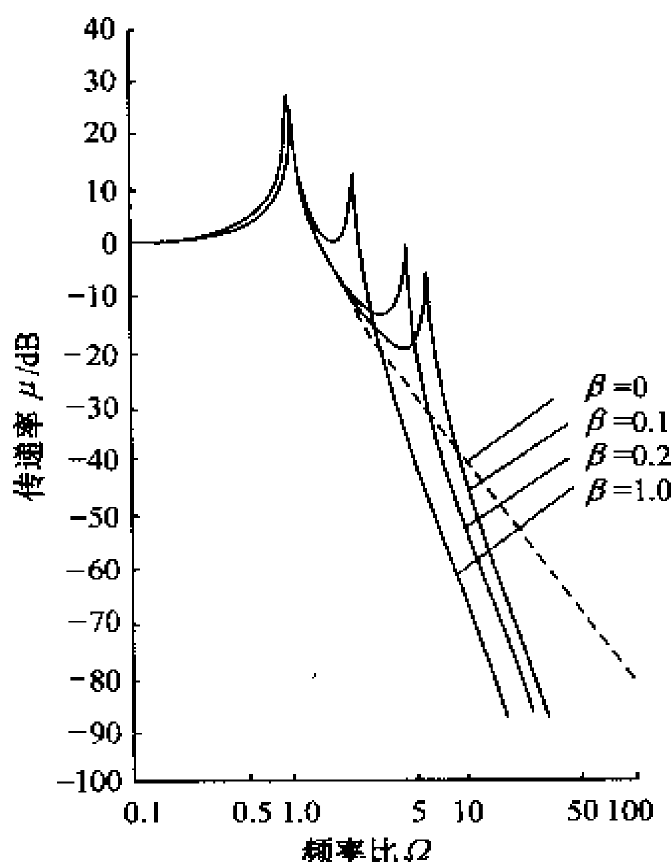


图 5-19　中间质量块 m_2 满足 $\beta = m_2/m_1$ 时，单轴向隔振系统的传递率

而易见，但要体现这种优点，即使对不太小的质量来说，也需要相当高的频率。因此，当 $\beta=0.1$ 时，只有当激励频率大约是普通隔振系统（没有中间质量）自然频率的 10 倍时，其降低传递率的优点才开始显现出来。这种系统具有非常大实用价值，例如当必须在存在多个高频共振且阻尼较低的非刚性基础上安装对象（如机器）时，便可采用这种方法。因此，可以将一个小中间质量块整合到隔振器的整体设计中，如图 5-20 所示。这类系统的另一种应用是将被隔振物体安装在惯性块或者大型安装结构上，同时也可能还需要和其它物体安装在一起，在物体和安装结构之间可以应用隔振器，并将惯性块当作一个有效中间质量，如图 5-21 所示，该图表示将三台柴油机安装在一个大的中间质量块上[3]。在这种情况下，当频率相对较低时就能够大幅度改善传通率特性。

由于具有中间质量块的隔振系统的特点是能够在高频范围内大大降低传递率，因此，中间质量必须为刚性，而且应在感兴趣的

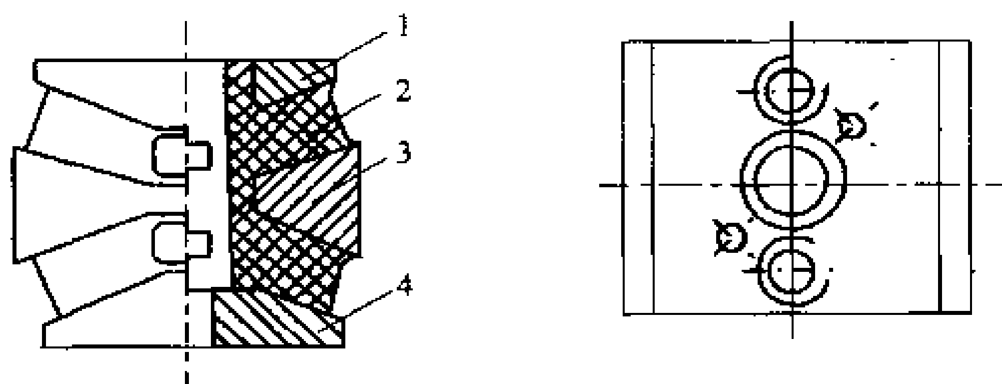


图 5－20　与隔振器组合在一起的中间质量块

1，4—上下基础；2—橡胶弹性元件；3—中间质量块。

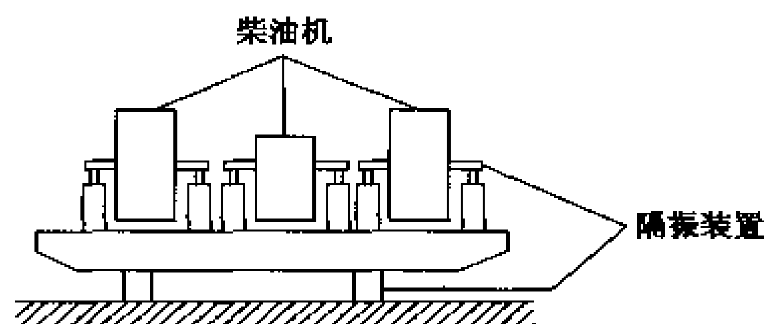


图 5－21　采用惯性块作为中间质量的隔振系统

频率范围内不会产生内共振。如果中间质量块上安装机座的刚度不够，也会产生寄生谐振，从而破坏高频范围内的传递率与 ω^4 成反比的这个规律。图 5－22[3] 比较了普通"弹簧－质量"系统（虚线）、中间质量块为绝对刚体（$\beta=0.2$）的隔振系统（实线）以及带有两个机座的相同系统（每个机座的质量 $m_f=0.0125m_2$、刚度 $k_f=5k_2$）（点画线）的传递率。

如果将 n 个质量块——而不是只用一个——通过弹簧元件连接起来（多层隔振），那么将使高频传递率以 $1/\Omega^{2(n+1)}$ 下降，但付出的代价是使共振频率增加到 $n+1$ 个。同时，每增加一个质量块，传递率迅速下降的频率点将进一步变大。在文献[8]中，描述了一种类似的多级系统，它用于"重力波天线"的隔振，基频为 1100Hz。在该频率处，隔离效果为 272dB（在 1100Hz 时，振动减小了 $\approx 10^{14}$）。

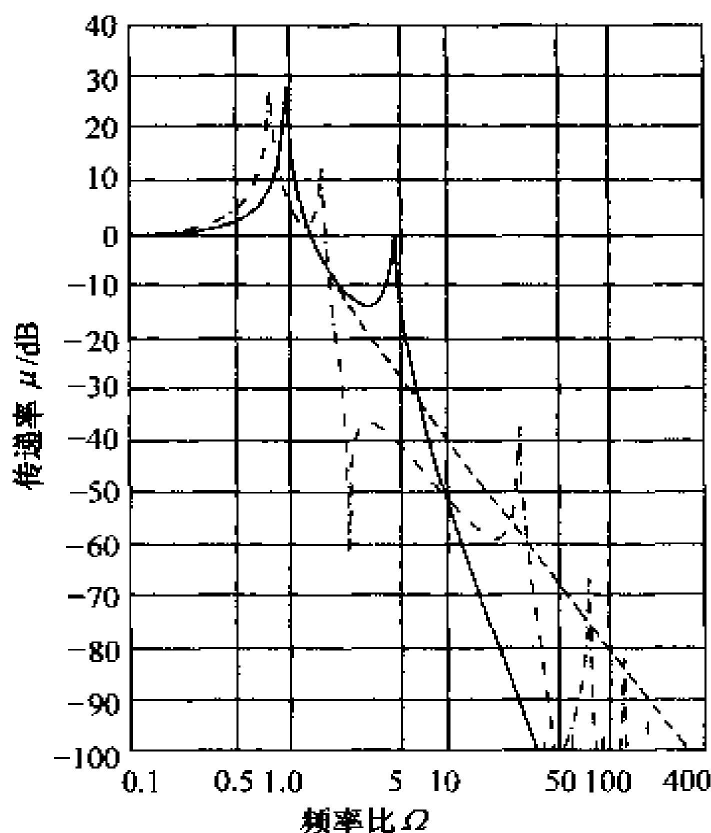


图 5－22　系统的刚度特性对具有中间质量块的隔振系统的影响

5.4　三自由度(平面)隔振系统

具有一个对称平面的隔振系统在一般情况下可以由两个方程组来表示，每个方程组含有三个二阶微分方程。而最令人感兴趣的还是在对称平面内的振动，它存在着两个平动坐标和一个转动坐标之间的耦合。

5.4.1　平面隔振系统的动态特性

典型的平面隔振系统如图 5－23(a)所示。虽然在此模型中各个弹性座架的刚度系数是相等的，但由于隔振器的不同刚度可以通过改变系统的重心位置来模拟，因此，该图仍可以表示一般情况。如果座架刚度和它承载的载荷成正比，为了进行动态分析，可以认为该系统的重心位于图 5－23(a)的中间位置。此系统的运

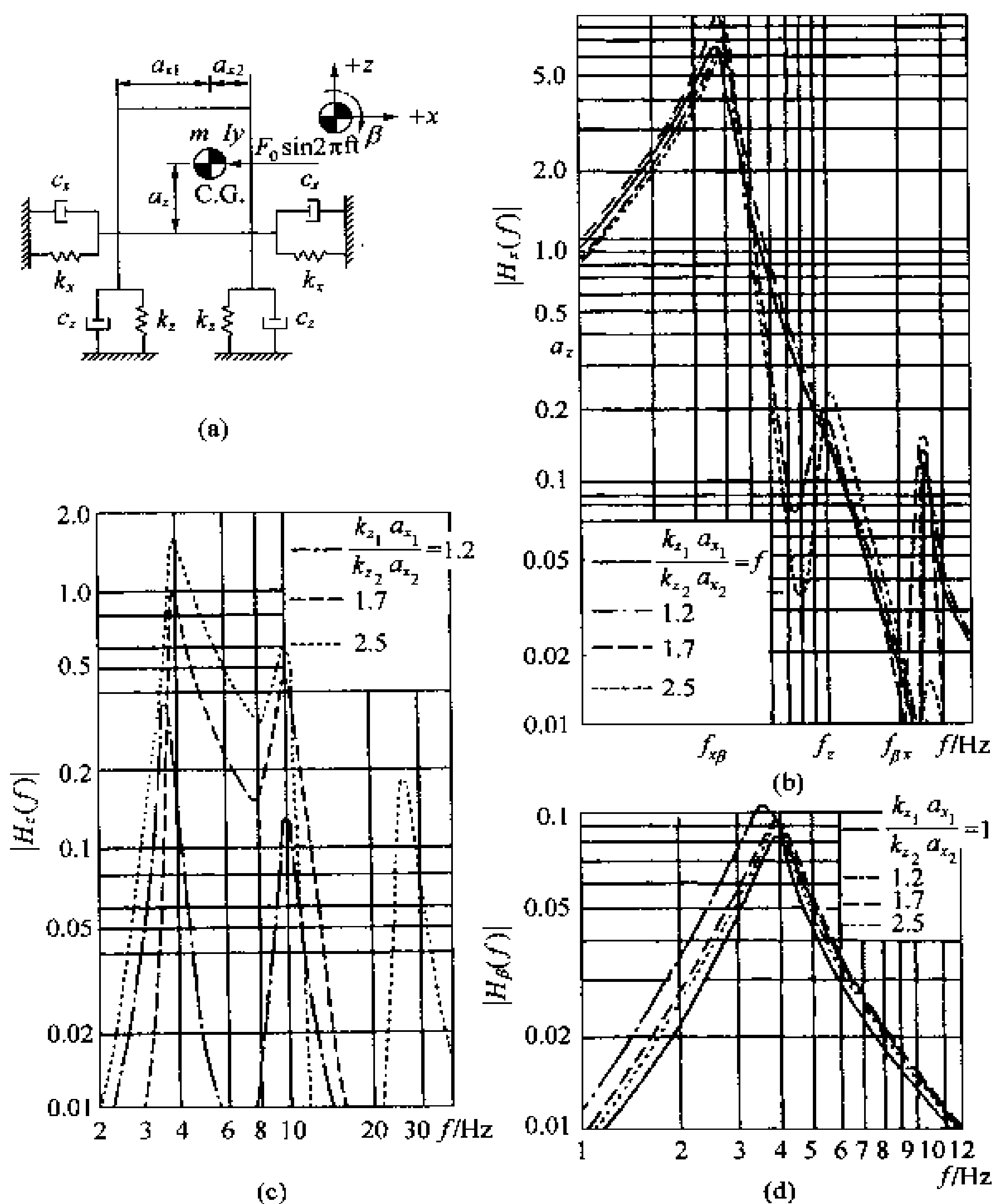


图 5-23　三自由度平面隔振系统

(a) 三自由度平面系统；(b) 当水平激励力通过重心时，在 x 方向上产生的振动的幅频特性；(c) 当水平激励力通过重心时在 z 方向上产生的振动的幅频特性；(d) 当水平激励力通过重心时在 β 方向上产生的振动的幅频特性。

动方程为

$$m\ddot{x}+2k_x(x-x_f)+2c_x(\dot{x}-\dot{x}_f)-2k_xa_z(\beta-\beta_f)-$$

$$2c_xa_z(\dot{\beta}-\dot{\beta}_f)=\sum F_xI_y\ddot{\beta}-2k_xa_z(x-x_f)-$$

$$2c_xa_z(\dot{x}-\dot{x}_f)-k_z(a_{x2}-a_{x1})(z-z_f)+[2k_xa_z^2+$$

$$k_z(a_{x1}^2+a_{x2}^2)](\beta-\beta_f)+[2c_xa_z^2+c_z(a_{x1}^2+$$

$$a_{x2}^2)](\dot{\beta}-\dot{\beta}_f)=\sum M_F+\sum Mm\ddot{z}+2k_z(z-z_f)+$$

$$2c_z(\dot{z}-\dot{z}_f)-k_z(a_{x2}-a_{x1})(\beta-\beta_f)-c_z(a_{x2}-a_{x1})(\dot{\beta}-$$

$$\dot{\beta}_f)=\sum F_z \tag{5-70}$$

式中：$\sum F_x$、$\sum F_z$ 是力在各自坐标方向上投影的和；$\sum M_F$ 是所有作用在被隔振物体上的力相对于重心的力矩的和；$\sum M$ 是作用在被隔振物体上的外力矩和。

文献[9]利用模拟计算机对式(5-70)进行了仿真，该仿真中的被隔振物体为几何参数和惯性参数都为中等(质量 $m=2300\text{kg}$、$I_y=270\text{kgm}^2$、$\rho=0.343\text{m}$、$a_{x1}+a_{x2}=0.7\text{m}$、$a_z=0.75\text{m}$，隔振器垂直和水平方向刚度比的变化范围为 $\eta_x=k_z/k_x=0.5\sim1.0$)的车床。该车床受到的激励为作用在重心位置的水平力，见图5-23(a)。图5-23(b)、(c)、(d)分别为系统在 $a_{x1}/a_{x2}=1.0\sim2.5$、$\eta_x=1$ 时，x、z、β 方向上的幅频特性。对其它不同的 η_x 值，所得到的曲线图不会发生很大的改变。由仿真结果可以得到如下结论。

(1) 对于给定的 $a_{x1}+a_{x2}$，平面隔振系统的自然频率对 a_{x1}/a_{x2} 的依赖性不大，即便是对明显不对称的系统而言，情况也是如此(见图5-24)。自然频率在很大程度上由 η_x 值确定。因此，不对称的平面隔振系统的自然频率接近于对称平面系统的自然频率，参见式(5-77)。

(2) 如果满足对称条件 $k_{z1}=k_{z2}$、$a_{x1}=a_{x2}$(或者当 $k_{z1}\neq k_{z2}$时，

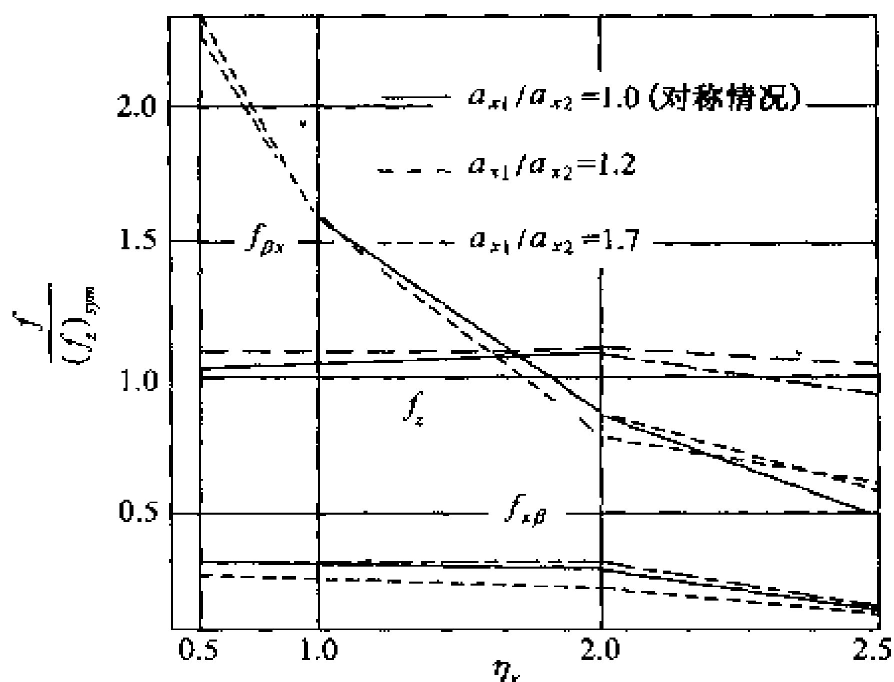


图 5-24　自然频率和不对称度之间的关系

$k_{z1}a_{x1}=k_{z2}a_{x2}$)，在 x 方向的激励力不会激起 z 方向的振动。摇摆(平动-转动)振动存在两个共振频率 $f_{x\beta}$ 和 $f_{\beta x}$。当对称条件不满足时，将会在频率 f_z(垂向自然频率)处出现第三个摇振共振。更具危害的是质量 m 会产生非常剧烈的垂直振动(由水平激励产生)。当 $k_{z1}a_{x1}/k_{z2}a_{x2}=1.2$ 时，该垂直振动的大小是摇摆振动最大共振幅值的 $0.35/6.7\approx0.05$ 倍，而当 $k_{z1}a_{x1}/k_{z2}a_{z2}=1.7$ 时，则为摇摆振动最大幅值的 $0.95/8\approx0.12$ 倍；当 $k_{z1}a_{x1}/k_{z2}x_{z2}=2.5$ 时则为 $1.6/6.5\approx0.25$ 倍。其中，假设了 $k_{x1}k_{x2}=k_{z1}/k_{z2}=k_1/k_2$。这种结果与垂直激励情况，或者基础存在一个运动学激励的情况类似。在许多隔振应用中，这种在某个方向上进行激励而在与其垂直的方向上产生很大响应的耦合振动是不期望发生的。例如，在对振动敏感的精密设备进行隔振时，便应避免上述情况发生。通常情况下，精密设备对水平振动的敏感程度是垂直方向的 2～3 倍，而地面在垂直方向的振动幅值是水平方向的 1.3～3.5 倍。由于对精密设备的隔振通常涉及到共振区域，所以可以保守地假设设备由于垂直振动而引起的水平方向共振幅值不应超过 $1/(3.0)(1.5)\approx0.22$ 倍垂直共振的幅值。在上述给定值之间进行插值

后，得出允许的最大不对称因子为 $k_{z1}a_{x1}/k_{z2}a_{x2} \leq 2.3$。其它条件下所允许的不对称因子可以采用类似的方法得到。

(3) 系统在水平激励下的高阶摇摆模态($f_{\beta x}$)响应比低阶摇摆模态($f_{x\beta}$)响应小 1 ~ 2 个数量级。当扭矩沿角坐标 β 作用时，相反的结论成立。这和文献[10]中的结论是吻合的。在文献[10]中，主要对与图 5 - 23(a)类似的某一种系统进行研究，并且假设隔振器在 x、z 方向的相对阻尼相同，或 $(c/c_{cr})_x = (c/c_{cr})_z = c/c_{cr}$，其中 $(c_{cr})_x = 2\sqrt{k_x m}$，$(c_{cr})_z = 2\sqrt{k_z m}$。若系统由机座(基础)的水平振动位移激励，可以得知，当 $c/c_{cr} = 0.01 \sim 0.1$ 时，系统在第二阶摇摆振动自然频率处的传递率比第一阶(低阶)摇摆振动自然频率处的传递率大约小 90%。当阻尼更大时($c/c_{cr} > 0.15$)，在较大自然频率 $f_{\beta x}$ 处的共振现象根本不明显。当对象 m 由旋转力矢量激励时(不平衡转子)，结果表明，阻尼为零时，在自然频率 $f_{\beta x}$ 处共振峰的宽度比自然频率 $f_{x\beta}$ 处小 90% ~ 92%。甚至当阻尼为零时，发生高频共振的概率也很小，因为它对激励频率的微小变化非常敏感，所以引入较小的阻尼就能够消除共振峰。

5.4.2 平面隔振系统的自然频率

自然频率是隔振系统非常重要的特性。在许多情况下，当激励的主要频谱成分已知时，自然频率便能充分反映系统的重要信息。前面的研究表明，非对称平面隔振系统的自然频率非常接近于对称系统的自然频率。因此，对称系统自然频率的计算非常重要。

如图 5 - 23(a)所示的平面对称隔振系统在 $a_{x1} = a_{x2} = a_x$ 时，具有三个自然频率，包括垂向自然频率 f_z，以及耦合摇摆振动(平动方向和转动方向)的两个自然频率 $f_{x\beta}$、$f_{\beta x}$。由式(5 - 23)很容易确定垂向自然频率。

耦合摇摆振动的自然频率与垂直自然频率之比为

$$\frac{f_{x\beta}}{f_z},\frac{f_{\beta x}}{f_z} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sum k_x}{\sum k_z}\left(1+\frac{a_z^2}{\rho_y^2}\right)+\frac{a_x^2}{\rho_y^2} \mp \sqrt{\left[\frac{\sum k_x}{\sum k_z}\left(1+\frac{a_z^2}{\rho_y^2}\right)+\frac{a_x^2}{\rho_y^2}\right]^2 - 4\frac{\sum k_x}{\sum k_z}\frac{a_x^2}{\rho_y^2}}} \tag{5-71}$$

式中：$\rho_y = \sqrt{I_y/m}$是被隔振物体绕 y 轴的惯性半径。

耦合摇摆振动（如 $x-\beta$）可以分解为水平方向的平动以及绕过重心的 y 轴的转动。当力 F_x 作用在图 5－25 所示的系统上时，运动的幅值表示为[11]

$$x_o = \frac{F_x}{4k_z}\left[\frac{\left(\frac{a_z^2}{\eta_x\rho_y^2}+\frac{a_x^2}{\rho_y^2}-\frac{ea_z}{\eta_x\rho_y^2}\right)-\frac{f^2}{f_z^2}}{\frac{f^4}{f_z^4}-\left(\frac{1}{\eta_x}+\frac{a_z^2}{\eta_x\rho_y^2}+\frac{a_x^2}{\rho_y^2}\right)\frac{f^2}{f_z^2}+\frac{a_x^2}{\eta_x\rho_y^2}}\right] \tag{5-72}$$

$$\beta_o = \frac{F_x}{4\rho_y k_z}\left[\frac{\frac{ef^2}{\rho_y f_z^2}+\left(\frac{a_z}{\eta_x\rho_y}-\frac{e}{\eta_x\rho_y}\right)}{\frac{f^4}{f_z^4}-\left(\frac{1}{\eta_x}+\frac{a_z^2}{\eta_x\rho_y^2}+\frac{a_x^2}{\rho_y^2}\right)\frac{f^2}{f_z^2}+\frac{a_x^2}{\eta_x\rho_y^2}}\right] \tag{5-73}$$

然而，这些耦合摇摆振动也可采用（绕不通过重心的轴）角振动来表示。

对水平激励力而言，从重心到摇振振动中心 o 的距离（图 5－25）是[11]

$$l_o = -\frac{a_x^2+\frac{a_z(a_z-e)}{\eta_x}-\rho_y^2\frac{f^2}{f_z^2}}{\frac{a_z-e}{\eta_x}+e\frac{f^2}{f_z^2}} \tag{5-74}$$

式中：e 是从水平力作用线到重心的距离；f 是激励频率。因此，旋转中心的位置取决于被隔振物体的惯性特征和几何形状，以及激

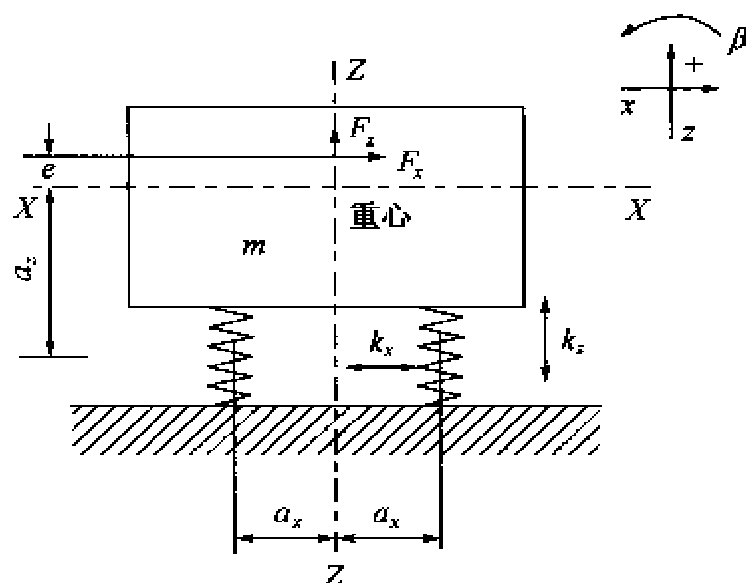


图 5 - 25　将被隔振物体的耦合振动描述为角振动

励力的作用位置和频率大小。当旋转轴位于重心之上时，距离 l_o 为负，反之为正。

在许多情况下，只有最小的自然频率 $f_{x\beta}$ 才非常重要。在较高自然频率 $f_{\beta x}$ 处的振动通常并不十分明显，同时，由于该自然频率非常高，$f_{\beta x} \approx (2.5-5) f_{x\beta}$，所以令式(5 - 74)中 $e=0$，$f=f_{\beta x}$ 可以得知该频率的摇摆振动中心非常接近于重心。因此，该频率处的振动具有准角振动的特征，并且很难由动态力或者由机座的平动激起。但它们可以被扭矩所激发。当 $e=0$，自然频率为 $f_{x\beta}$、$f_{\beta x}$ 时，摆动角度可以当作图 5 - 23(a)及图 5 - 25 中系统的正则坐标。

在典型的机器设备中，考虑到质量分布的一般趋势以及 a_{xy}/a_z 的大小[12]，可以采用下式来估计在两个垂直坐标平面内较小的摇摆振动自然频率

$$f_{x\beta}, f_{\gamma\alpha} \approx f_z \sqrt{\frac{0.9}{\eta_{x,y} + \left(\frac{a_{x,y}}{a_z}\right)^2}} \qquad (5-75)$$

当参数在 $0.25 \leqslant \eta_{x,y} \leqslant 4$ 以及 $0 \leqslant a_{x,y}/a_z \leqslant 1$ 范围内变化时，该表达式计算所得到的结果误差不超过 5% ~10%。该表达式最重要的特点是低频摇摆模态的自然频率在第一次近似后不明显依赖于

被隔振物体的惯性半径,但它是安装坐标之比的隐函数。当重心的每侧布置了相同数量的座架,且对于重心左侧的所有座架来说满足 $a_{z1}=\text{const}$,对于重心右侧的所有座架满足 $a_{z2}=\text{const}$ 时,可以用该表达式进行计算。对特定的应用而言,若给定所要求的自然频率,则可以应用式(5-75)迅速计算出隔振器所需的刚度比

$$\eta_{x,y}=\frac{0.9}{(f_{x\beta},f_{y\alpha}/f_z)^2}-\left(\frac{a_{x,y}}{a_z}\right)^2 \tag{5-76}$$

应用由 Banakh 提出的一般方法,可以用如下公式估计出不对称性对低频摇摆振动自然频率的影响[2]

$$\left(\frac{f_{x\beta}}{f_z}\right)_{\text{asym}}=\left(\frac{f_{x\beta}}{f_z}\right)_{\text{sym}}+\varepsilon;\quad \varepsilon=\left(\frac{a_{x2}-a_{x1}}{2a_z}\right)^2\frac{\left[1-\left(\frac{f_{x\beta}}{f_z}\right)_{\text{sym}}\eta_x\right]^2}{1+\left[1-\left(\frac{f_{x\beta}}{f_z}\right)^2_{\text{sym}}\eta_x\right]^2\frac{\rho_y^2}{a_2^2}} \tag{5-77}$$

类似地,也可以写出 $f_{y\alpha}$ 的表达式,其中下标 sym 表示对称系统,asym 表示不对称系统。图 5-23(b)是应用式(5-77)对上述情况进行分析得出的结果,其中 $a_{z2}/a_{z1}=1.7$、$\eta_x=1$,当 $(f_{x\beta}/f_z)_{\text{sym}}=0.35$ 时,得到 $\varepsilon\cong 0.006$,因此证实了 5.4.1 节中所得到的结论。

如果隔振系统具有一个垂直对称平面,它可以分解为对称平面内的平面隔振系统、与对称平面垂直的平面内的耦合摇摆振动系统(平移振动和角振动),以及关于垂直轴的扭转振动系统。

扭转振动的自然频率可以通过分析上述隔振系统来得到(图 5-26),系统的扭转刚度 k_γ 为

$$k_\gamma=\frac{M_z}{\gamma}=\frac{4P\sqrt{a_x^2+a_y^2}}{\dfrac{\Delta}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}}=4\frac{P}{\Delta}(a_x^2+a_y^2)=4k(a_x^2+a_y^2) \tag{5-78}$$

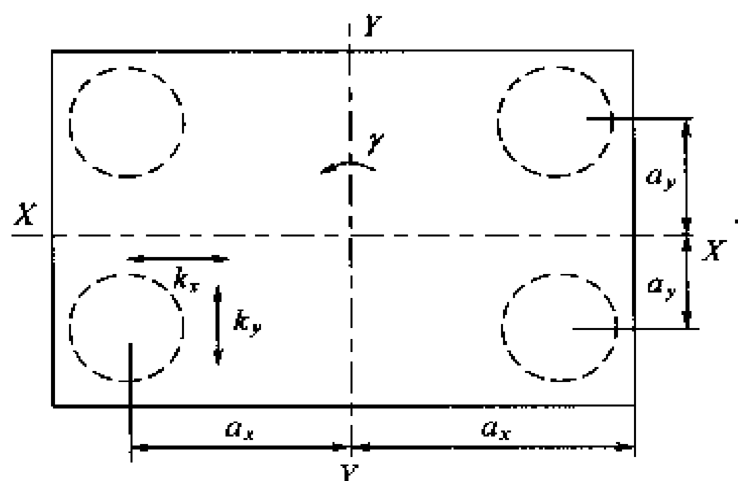


图 5－26　隔振系统的平面图

式中：$k=k_x=k_y$ 是隔振器在水平方向上的刚度。假定隔振器关于 z 轴对称，被给隔振物体关于 z 轴的惯性矩是

$$I_z = M\rho_z^2 \approx M\frac{1}{20}(4a_x^2+4a_y^2) = M\frac{1}{5}(a_x^2+a_y^2) \tag{5-79}$$

由此可知自然频率是

$$f_\gamma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_\gamma}{I_z}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_y(a_x^2+a_y^2)}{M\frac{1}{5}(a_x^2+a_y^2)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_z}{\eta}\frac{5}{M}} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_z}{M}}\sqrt{\frac{5}{\eta}} = f_z\sqrt{\frac{5}{\eta}} \tag{5-80}$$

式中：$\eta = k_z/k_{x,y}$。

5.4.3　隔振器倾斜放置的平面隔振系统

在许多隔振系统中，平移振动和角振动（绕垂直的两条水平轴）之间的耦合通常是不期望出现的，而且还必须采取一些措施使相应的自然频率能独立变化，从而使它们相互接近。对于具有一个对称平面的系统而言，可以将隔振器放置在通过重心的水平

面内来达到解耦的目的。然而，该类系统的设计相当困难。例如，大型机器或者坐标测量仪只能够通过使用重型的、价格昂贵的基础块(惯性块)才能进行这种安装。解耦的另外一种方法是将隔振器的主刚度轴倾斜(隔振器倾斜放置)，如图 5－27 所示[11]。前面已经提到，在某些情况下，坐标之间的耦合是有益的。例如，空气弹簧在 z 方向上具有很大的阻尼，但在 x、y 方向上的阻尼较小。在这种情况下，垂直振动和摇摆振动之间的耦合可以将一些阻尼传递给摇摆振动模态。

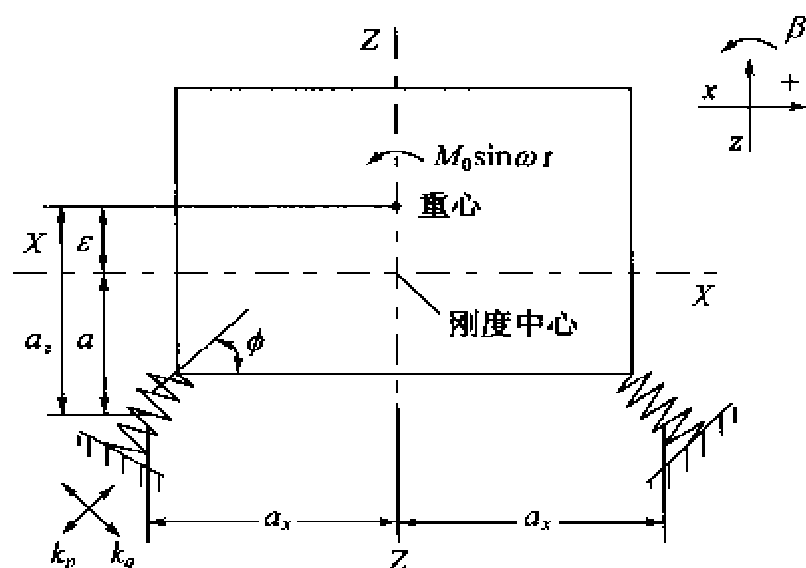


图 5－27　隔振器倾斜放置的隔振系统

在图 5－27 中，坐标系的原点和"刚度中心"重合(有时也称为振动中心或者弹性中心)。刚度中心是指当力通过该点时，使被隔振物体仅仅产生平动，而不产生任何角位移。绕刚度中心的力矩仅仅使对象产生转动，而不产生平动。隔振器的主弹性轴 p、q 相对于坐标轴倾斜的角度为 ϕ，隔振器在 p、q 方向上的刚度分别为 k_p、k_q。

在图 5－27 中，如果作用在物体上的力矩为 $M = M_0\sin\omega t$，那么重心在 x 方向上的位移是 $x_{C.G.} = x - \varepsilon\beta$，相应的加速度为 $\ddot{x}_{C.G.} = \ddot{x} - \varepsilon\ddot{\beta}$。刚度(弹性)中心的平动位移仅仅产生弹性平移力 $k_x x$，角位移 β 仅仅产生弹性力矩 $k_\beta\beta$。因此，运动方程为

$$m(\ddot{x} - \varepsilon\ddot{\beta}) = -k_x x$$
$$m\rho_{ec}^2\ddot{\beta} - m\varepsilon\ddot{x} = -k_\beta\beta + M_o\sin\omega t \tag{5-81}$$

式中：$\rho_{ec}=\sqrt{\rho_y^2+\varepsilon^2}$是质量 m 相对于弹性中心的惯性半径，k_x、k_β 分别是隔振器的平动刚度和角刚度，ε 是重心和弹性中心之间的距离。

在稳定的简谐振动区域，由式(5－81)所得到的振幅是

$$x_o = \frac{-M_o\varepsilon\omega^2}{m[\rho_{ec}^2(\omega^2-\omega_\beta^2)(\omega^2-\omega_x^2)-\varepsilon^2\omega^2]}$$
$$\beta_o = \frac{-M_o(\omega^2-\omega_\beta^2)}{m[\rho_{ec}^2(\omega^2-\omega_\beta^2)(\omega^2-\omega_x^2)-\varepsilon^2\omega^2]} \tag{5-82}$$

式中：$\omega_x=\sqrt{k_x/m}$、$\omega_\beta=\sqrt{k_\beta/m\rho_{ec}^2}$是“部分”自然频率。耦合摇摆振动的实际自然频率 $\omega_{x\beta}$可以通过令式(5－82)的分母为零求解 ω 得到。

$$\frac{\omega_{x\beta}}{\omega_x} = \sqrt{\frac{1+\lambda_1^2 \pm \sqrt{(1+\lambda_1^2)^2-4\lambda_1^2\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{\rho_{ec}}\right)^2\right]}}{2\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{\rho_{ec}}\right)^2\right]}} \tag{5-83}$$

式中：λ_1 是无量纲系数

$$\lambda_1 = \frac{\frac{a_x}{\rho_{ec}}\sqrt{\frac{k_q}{k_p}}}{\cos^2\varphi+\frac{k_q}{k_p}\sin^2\varphi} \tag{5-84}$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} = \sqrt{\frac{4k_p}{m}\left(\cos^2\varphi+\frac{k_q}{k_p}\sin^2\varphi\right)} \tag{5-85}$$

当角度值为 ϕ 时，刚度中心和重心重合（$\varepsilon=0$），这可以通过假设被隔振物体在 x 方向产生了很小水平位移 Δx，并关于 y 轴（它和图 5－27 中的平面垂直）的弹性力矩为零得到，此时有

$$-4a_x k_p(\Delta x)\sin\phi\cos\phi + 4a_x k_q(\Delta x)\sin\phi\cos\phi +$$

$$4ak_p(\Delta x)\cos^2\phi + 4ak_q(\Delta x)\sin^2\phi = 0 \qquad (5-86)$$

这个条件对应于将耦合的摇摆振动（水平－转动）进行解耦。此时，当物体在 x 方向上产生位移时，作用在对象上的弹性合力通过重心。同时，使对象产生旋转运动的弹性合力为绕重心的力矩。因此，由（5－86）可以得到解耦条件为

$$\frac{k_q}{k_p} = \frac{\dfrac{a_x}{a_z} + \cot\varphi}{\dfrac{a_x}{a_z} - \tan\varphi} \qquad (5-87)$$

该条件如图 5－28 所示[31]。当该条件得到满足时，平移振动的自然频率为

$$\omega_{x\beta} = \omega_x \qquad (5-88)$$

角振动的自然频率为

$$\omega_{\beta x} = \omega_x\lambda_1 = \omega_\beta = \frac{a_z}{\rho_y}\sqrt{\frac{4k_p}{m}\frac{1}{\cos^2\varphi + \dfrac{k_q}{k_p}\sin^2\varphi}} \qquad (5-89)$$

将隔振器倾斜放置进行解耦的缺点是，需要单独为每个被隔振物体选择倾斜角，除非制造商已经给出了其规模生产的产品所需的倾斜角，如汽车的发动机。同时，如果物体的质量分布会发生变化，例如汽车发动机中存在运动部件或者某些重量能变化的附件等，这种几何解耦方法不能够实现完全解耦。如果物体的振动是由重型运动质量块停止/反向运动而产生的，那么只有当所有动态力的合力通过重心时，才能够实现完全解耦。否则，动态作用力

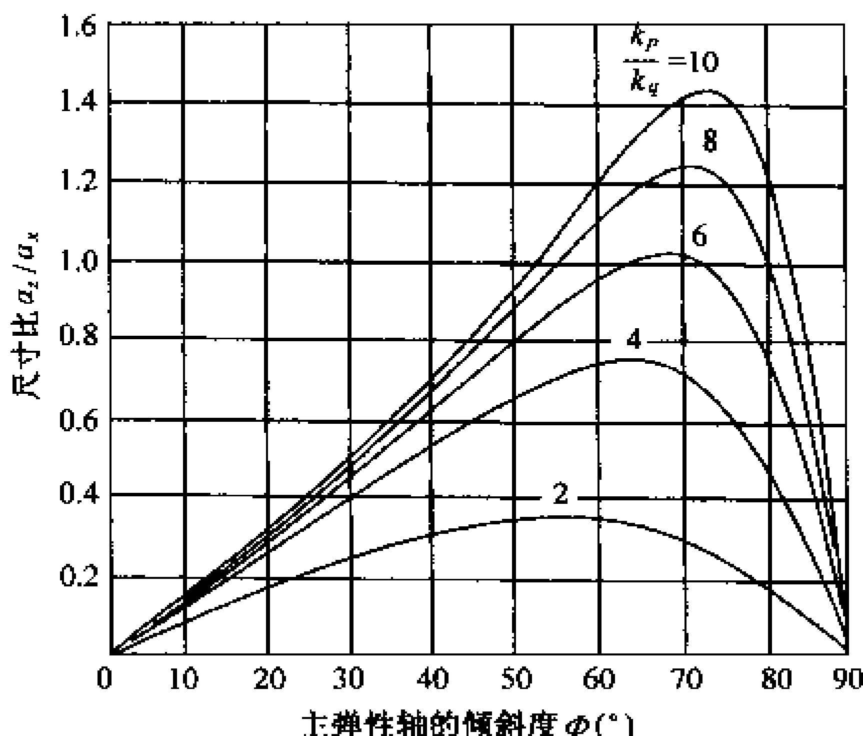


图 5－28　隔振器倾斜放置时系统的动态耦合曲线

可以看作是由通过重心的力以及绕重心的力矩组成，因而同时导致了平移振动和角振动。这种效应可以称为"激励力耦合"。

5.4.4　会聚式等频系统

对隔振器倾斜放置的平面隔振系统而言，一种有趣的改进系统是"会聚式等频系统"[13]。该系统如图 5－29 所示，它共有 6 个互不耦合的模态，每个模态具有相同的频率，这对汽车发动机的悬挂装置是非常有利的。会聚式环状隔振系统将三个或者更多隔振器/座架布置在一个规则多边形的各个顶点上，该多边形内接于一个半径为 r 且平行于 XOY 平面的圆（虚线表示），圆心在 Z 轴上的点 G 处。所有座架的主刚度轴 $z_1, z_2, \cdots$ 相交于 Z 轴上的点 A，并且与 $X-Y$ 平面的倾斜角为 ϕ。各座架的 $x_1, x_2, \cdots$ 轴与圆相切。座架沿主轴 x, y, z 方向的主刚度系数分别为 k_x, k_y, k_z。坐标系的原点 O 和被隔振物体的重心重合。角度 θ 是指重心和座架安装点之间的连线与所有座架所在平面之间的夹角。如果下面的方程得到满足，平面（三自由度）系统将被解耦

图 5-29　会聚式环形隔振系统

$$(k_z\cos^2\phi + k_y\sin^2\phi)\tan\theta = (k_x - k_y)\sin\phi\cos\phi \quad (5-90)$$

对图 5-29 中的 6 自由度系统进行解耦时要求

$$(k_z\cos^2\phi + k_y\sin^2\phi + k_x)\tan\theta = (k_x - k_y)\sin\phi\cos\phi \quad (5-91)$$

如果 $\delta_o = (k_x - k_y)/2k_z$、$\delta_{xy} = k_x/k_y$，那么式(5-91)可以写成

$$[\cos^2\phi + 2\delta_o(1 + \delta_{xy})/(1 + \delta_{xy} - 2\delta_o)]\tan\theta = \sin\phi\cos\phi \quad (5-92)$$

式(5-92)的条件可以通过多种方法来满足，但为了在所有方向上实现相等的平动刚度以及三个相等的角刚度，分别所需满足的方程为

$$\cos^2\phi = 2(1 - \delta_o)1 + \delta_{xy}/3(1 + \delta_{xy} + 2\delta_o) \quad (5-93)$$

$$(1 + \delta_{xy} - 4\delta_o\delta_{xy})/(1 + \delta_{xy} - 2\delta_o) - \cos^2\phi = \tan\theta\sin\phi\cos\phi \quad (5-94)$$

对于平移振动自然频率和角振动自然频率相同的系统来说，需要满足的方程为

$$\frac{\rho^2}{R^2} = \frac{3\delta_{xy}\cos^2\theta}{1+\delta_{xy}}\frac{2\delta_o}{1+2\delta_o} \tag{5-95}$$

式中：ρ 为被隔振物体（发动机）的惯性半径；R 为某个座架和重心之间的距离。解式(5-92)~式(5-95)，可以求出所需要的座架参数，从而保证当被隔振物体绕所有惯性主轴的惯性矩都相同时，系统具有6个相等自然频率。如果被隔振物体对于不同的轴具有不同的惯性矩，那么自然频率就不会相同，但仍然保持在一个相对较窄的频率范围内。如果系统在不同方向上的角刚度相同时，该范围可以通过下式进行估计

$$\frac{f_{max}}{f_{min}} = \sqrt{\frac{I_{max}}{I_{min}}} \tag{5-96}$$

式中：f_{max}，f_{min}分别为最大和最小的自然频率；I_{max}，I_{min}分别为最大和最小的主惯性矩。

由于该系统将座架倾斜放置，所以垂直作用在物体上的力在支承结构上产生横向反作用力。图5-30中的系数K即为横向反

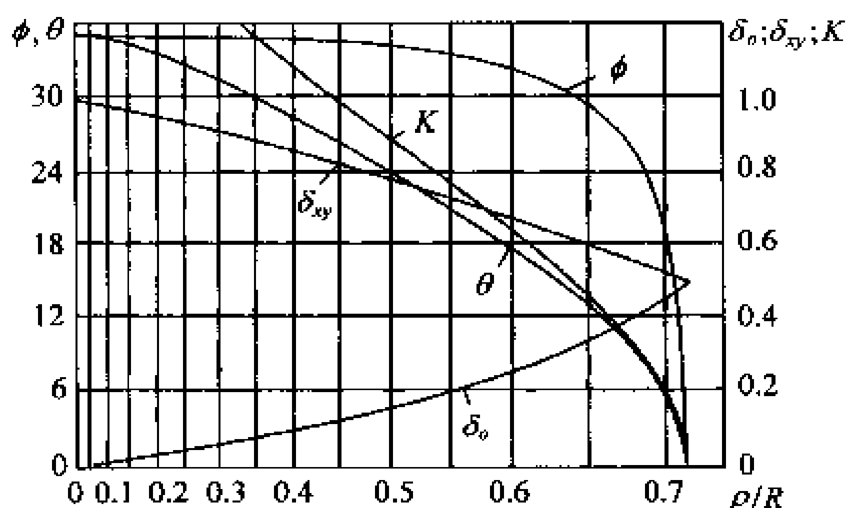


图5-30　为了给具有相同主惯性矩的被隔振物体提供6个相等的自然频率而采用会聚式悬挂装置时所需的参数

作用力和垂直作用力之比。横向反作用力必须通过增加支承结构的刚度(例如在汽车上安装支架)加以克服。每个座架的轴向刚度 k_z 是根据所需的自然频率(对 6 个振动模态而言)f_n 来进行选择的

$$k_z = \frac{12\pi^2 f_n^2 M}{N(1 + 2\delta_o)} \tag{5-97}$$

式中:M 是对象的质量,N 是座架的数量。

5.5 随机激励下的隔振系统

5.5.1 定义

对于随机振动激励来说,振动过程中系统参数——如位移、速度和加速度——的大小在每一时刻都是不可预测的。例如,当汽车在崎岖不平的公路上行使时,当喷气式飞机或火箭发动机在空气动力过程发生变化时,或者当工厂地面上安装的不同加工设备共同工作时,都会产生随机振动。单独某一次随机振动的时间历程是不可预测的,然而,如果在相同的条件下,这个过程重复出现,则可以预测该过程中某一参数值在某一范围内出现的概率。图 5-31 给出了随机振动过程的几个实例。对于每个实例来说,t_1 时刻振动的大小为各不相同的随机值,图 5-31 所示的时间历程描绘了产生随机振动的振源(如路面或发动机推力的变化)。隔振系统通常与机械结构相连,包括支承结构(基础)和被隔振物体在内。它们可以当作多自由度动态系统,其作用与滤波器类似,从而可以增强或者抑制随机激励中的某些成分。随机振动过程的频谱成分具有很明显的特征,它们的幅值和相位会像随机变量那样变化。图 5-32 所示即为这种经过滤波了的随机振动过程,该图描绘的是推土机悬挂系统上的动态载荷,显然,其优势频率约为 7Hz。这种过程可以看作是窄带随机振动和不太强的宽带随机振

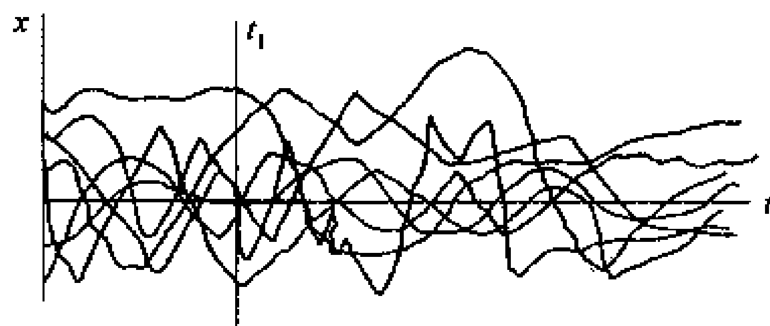


图 5－31　7 个随机函数

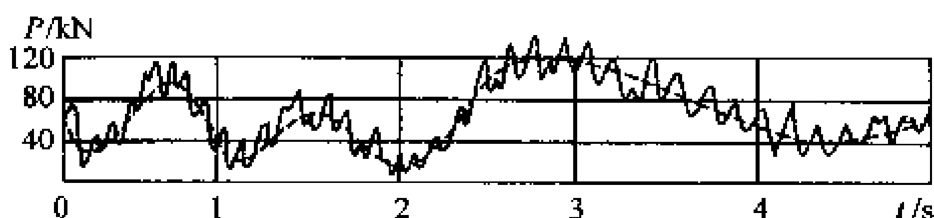


图 5－32　推土机工作时悬挂系统承受的动载荷

动的混合振动。此时，隔振器也用作功能强大的滤波器。

在每个频率 $\omega=\omega_n$ 处，随机振动的特征可以通过功率谱密度（PSD）$S(\omega_n)$来表示

$$S(\omega)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{\Delta\overline{x^2}}{\Delta\omega}=\frac{\mathrm{d}\overline{x^2}}{\mathrm{d}\omega}\tag{5－98}$$

式中：随机变量 x 的均方值为

$$\overline{x^2}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\,\mathrm{d}t=C_0^2C_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2\tag{5－99}$$

式中：$2T$ 是变量的长度（持续时间）；C_n^* 是随机过程的傅里叶级数分解中第 n 个频谱成分的幅值。随机函数的均方值也可以用 $S(\omega_n)$来表示

$$\overline{x^2}=\int_0^{\infty}S(\omega)\,\mathrm{d}\omega\tag{5－100}$$

式中：$S(\omega_n)$的大小通常由加速度值来确定，单位为 g/Hz，或者为 g^2/Hz。$S(\omega_n)$的包络线可用于对关键设备在随机激励下的性能

进行测试。当 $S(\omega_n)$ 在宽频范围内为常数时，在此范围内的随机过程被称为“白噪声”。文献[14]中给出了一些测试规范。例如，对军用计算机和灵敏仪器而言，需要在频率范围为 10Hz ~ 2000Hz、$S(\omega_n)=0.1\mathrm{g}^2/\mathrm{Hz}$（均方根值为 $\sqrt{\overline{x^2}}=14\mathrm{g}$）的条件下进行测试。

对精密设备和振动敏感仪器的隔振而言，通常不直接对 $S(\omega_n)$ 进行规定。较为方便的方法是给定安装设备的地面所产生的最大位移的包络线，或者给定安装精密设备的不同建筑物的地面振动速度的包络线。

5.5.2 随机振动在动态系统中的传播

对随机输入来说，隔振有效性的评判标准是当输入的随机振动处于规定的 $S(\omega_n)$ 包络线内时，被隔振对象加速度功率谱的均方值是否满足要求。若采用了较软的隔振器（这样更有效），将导致隔振器产生较大的变形，从而使得被隔振物体的位移增加，所以隔振系统的实际隔振能力受到限制。所允许的位移通常受到被隔振物体封装条件的限制。

对于任意激励 $x(t)$，若作用时间从 $t=-\infty$ 开始，无论是确定性系统还是随机系统，其输出 $y(t)$ 可以用 Duhamel 积分来表示[15]

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty}x(t-\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5-101}$$

式中：$h(t)$ 是系统在 delta 函数脉冲 $\delta(t)$ 作用下的响应，或者叫做脉冲响应函数。当输入为简谐激励 $x=x_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 时，有

$$y(t)=\int_{0}^{\infty}x_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty}x_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}h(\tau)\mathrm{d}\tau=H(\omega)x_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{5-102}$$

式中：$H(\omega)$ 是系统的传递函数

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} h(\tau) d\tau \qquad (5-103)$$

因此，简谐激励下系统的响应可以将激励乘以表示系统频谱特征的传递函数而得到。当 $\tau < 0$ 时，$h(\tau) = 0$，因此式(5－103)的积分下限可以用 $-\infty$ 来代替，而不会改变结果。这表明 $H(\omega)$ 是脉冲响应函数 $h(\tau)$ 的傅里叶变换。

如果输入具有丰富的频谱成分，例如，它是一个随机过程，那么，它可以分解为傅里叶级数。一般情况下，它可以用傅里叶积分来表示

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (5-104)$$

而函数 $x(t)$ 可以通过傅里叶逆变换来得到

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (5-105)$$

其特征由 $S(\omega)_{in}$ 来刻画。被隔振物体绝对加速度(输出信号)的功率谱密度函数是

$$S(\omega)_{out} = S(\omega)_{in} | H(\omega) |^2 \qquad (5-106)$$

且输出信号的均方值可以通过输入信号的均方值来表示

$$\overline{y^2} = \int_0^{\infty} S(\omega)_{out} d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega)_{in} | H(\omega) |^2 d\omega \qquad (5-107)$$

因此，激励信号的 PSD 函数经过系统传递函数的修正后，再对频率进行积分，便可以得到用以描述系统输出信号统计特征的均方值。

当系统受到基础的加速度激励时，被隔振物体和基础之间相对位移的 PSD 为[16]

$$S(\omega)_{rel} = \frac{1}{\omega^4} | \mu_{rel}(i\omega) |^2 S(\omega)_{in} \qquad (5-108)$$

在实际隔振系统中，精密设备/振动敏感设备通常需要避免受到随机或者类似随机激励的影响。例如，火箭推进的宇宙飞船和导弹上的测量仪和计算仪的隔振，工厂中精密生产设备和测量设备的隔振等。这种隔振系统包括了隔振系统本身（如隔振器以及可能需要用到的惯性质量块）以及由被保护对象组成的动态系统。在某些情况下，完整的隔振系统还包括某些其它元件，如中间质量块等。正确理解隔离系统中不同子系统怎样对外部随机激励进行“滤波”是非常重要的。如果输入信号是随机信号且不可预测，那么，通过一个合适的小阻尼单自由度隔振系统后，系统的响应将具有窄带形状，如图 5－32 或图 5－33 所示。

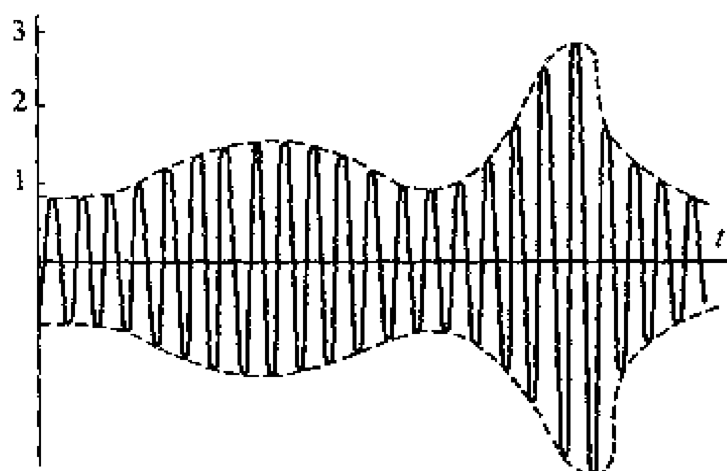


图 5－33　随机输入条件下单自由度系统的输出

图 5－34 比较了随机输入信号（振动位移 $S(\omega)=S_{x_0}$）和输出信号（振动位移 S_x 或振动速度 S_v）的功率谱密度函数。输出信号是被小阻尼单自由度隔振系统滤波后的结果，因此，只在频带 $\omega_n\pm\zeta\omega_n$ 内才有大量的振动能量通过，在该共振区内，系统的自然频率为 ω_n，阻尼比为 ζ。输出信号类似于一个频率为 ω_n、幅值随时间随机变化的正弦信号。高阻尼动态系统的振动能量可以在更宽的频带通过，但其共振幅值要小得多。对多自由度隔振系统而言，安装在振动机座上的物体将承受几个频率大小等于自然频率的信号的激励。理解这一点对于评估随机激励在具有几个弱耦合子系统的隔振系统中的传播非常重要。

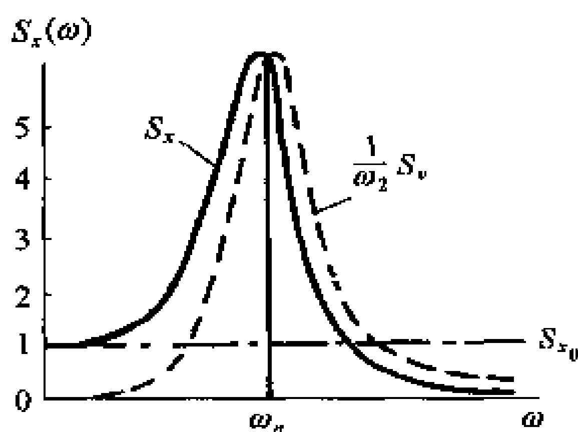


图 5 – 34　单自由度系统对白噪声位移激励的过滤作用

S_{x_0}—白噪声位移激励；S_x—输出振动位移的 PSD；S_v—输出振动速度的 PSD。

如前面所述，隔振器中窄带相对振动所导致的位移的大小信息对隔振系统的设计和装配具有非常重要的意义。对小阻尼系统而言（$\zeta \ll 1$），相对位移的均方值是[15]

$$\overline{x_{rel}^2} = S(\omega)_{in}\int_0^\infty |\mu_{rel}|^2 d\omega = \frac{\pi}{4\zeta}\frac{S(\omega)_{in}}{\omega_n^3} \quad (5-109)$$

5.6　脉冲激励作用下的隔振系统

无论脉冲激励是由被隔振物体产生还是从基础/机座传递而来，评估隔振系统在该脉冲激励下的响应，对设计有效的隔振系统将起到非常重要的作用。在很多情况下，脉冲激励比稳态振动危害更大。然而，因为必须同时考虑系统的受迫振动和由瞬时脉冲激发的自由振动，所以进行这种评估通常是非常困难的。虽然可以计算出某些特殊情况下系统的响应，但仍然希望能够提出脉冲激励下隔振系统设计的一般标准，以及快速设计的第一次近似方法。冲击谱法和响应谱法便能很好地胜任该项任务[17,18]。

响应谱是指用图形来表示系统响应过程中所选参数和激励过程中某个参数的关系。冲击谱表示响应中所选参数的峰值和脉冲激励中所选参数的峰值之比。它们都表示为某一个无量纲参数的

函数形式，并用曲线图表示出来。通常情况下，这个无量纲参数是脉冲时间和系统响应的自然周期之比。显然，该定义表明响应谱和冲击谱并非振动理论上定义的频谱。然而，由于习惯的原因，这些术语在文献中被广泛使用。

图 5－35 给出了矩形脉冲、半正弦脉冲和正矢脉冲等典型脉冲，以及在这些脉冲作用下，不同脉冲持续时间 τ 与自然周期 $T_n = 1/f_n$ 之比时的响应曲线[17, 18]。相对值 $v(t)/\xi_p$ 为无量纲时间 t/τ_p的函数，其中 $v(t)$ 是被隔振物体响应的瞬时值，ξ_p 为作用在基础上的脉冲的最大高度，τ_p是脉冲持续时间)。图 5－36 给出了隔振器在不同阻尼（阻尼比 ζ）时冲击谱 $A = v_p/\xi_p$ 和 τ_p/T_n 之间的函数关系，其中 v_p 是响应的最大值。图 5－36(a)、(b)、(c)、(d)分别给出了矩形脉冲、半正弦脉冲、正矢脉冲和“斜坡”脉冲下的冲击谱[19]。图 5－36(e)[20]给出了单自由度系统在衰减正弦脉冲作用下的冲击谱。图 5－37[21]所示为在正矢脉冲激励下，基础和被

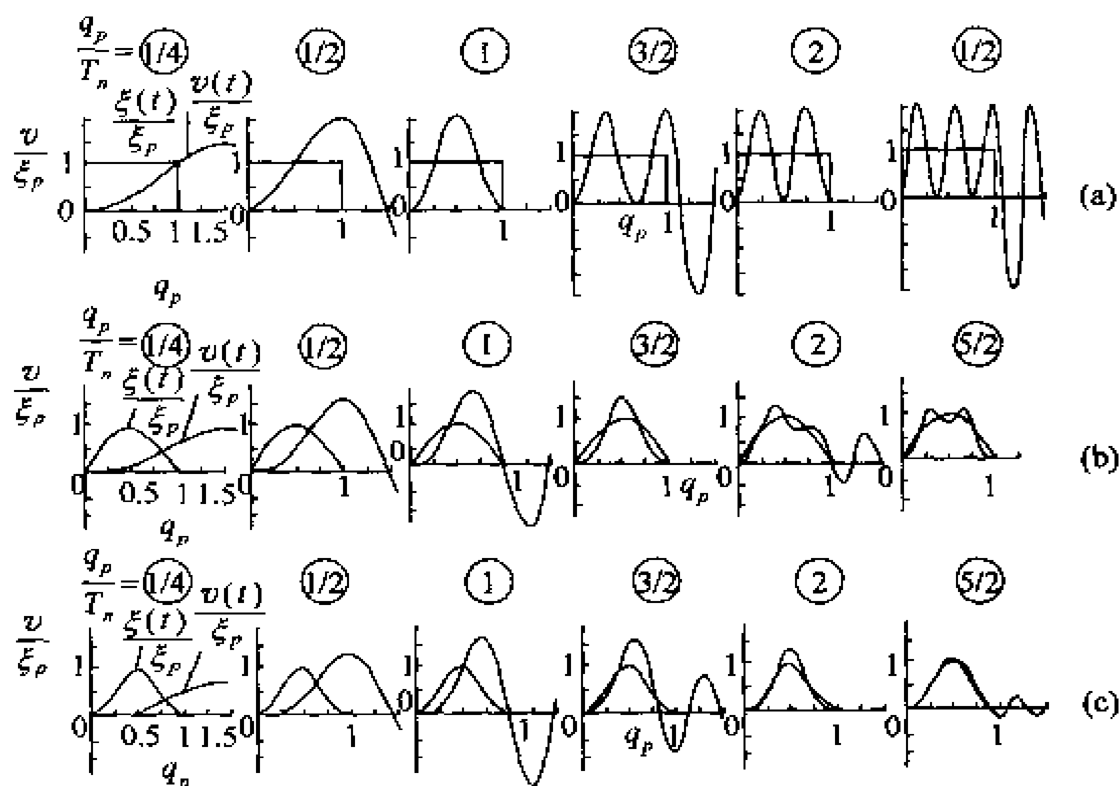
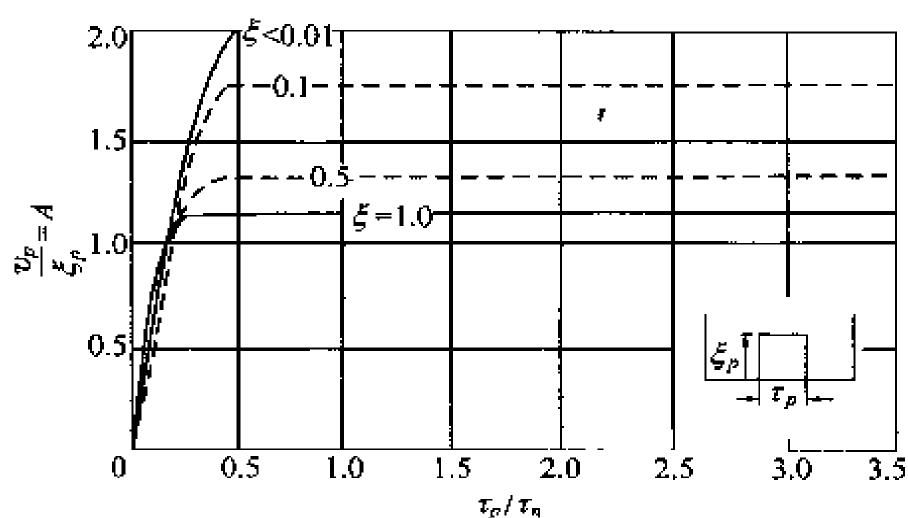


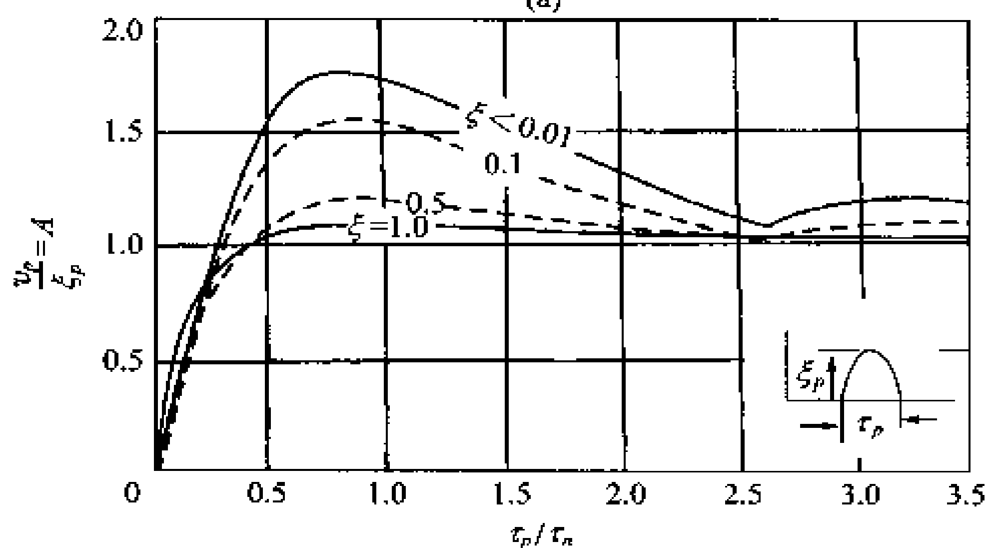
图 5－35　不同脉冲激励条件下单自由度系统响应的时间历程

(a) 矩形脉冲；(b) 半正弦脉冲；(c) 正矢脉冲。



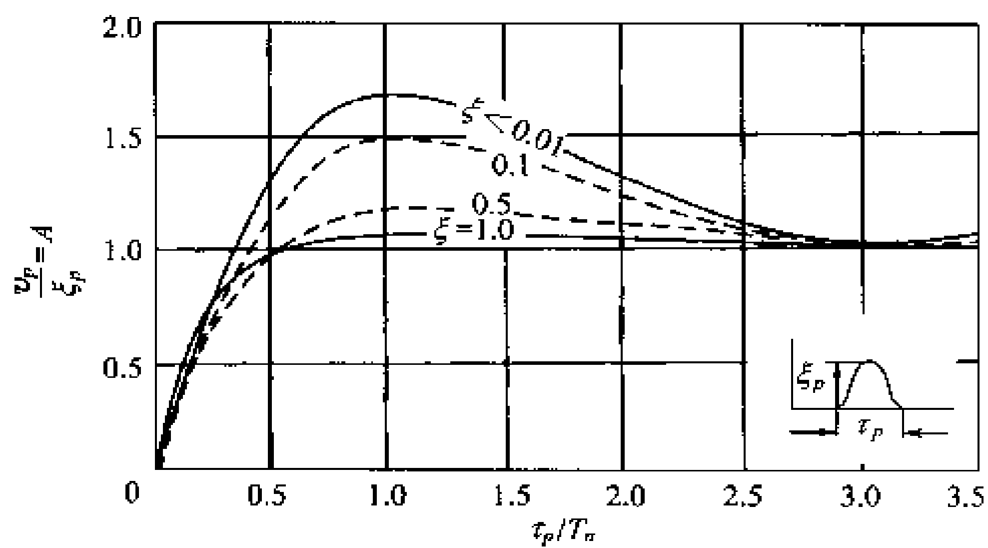
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
$\xi<0.01$
0.1
0.5
$\xi=1.0$
$\frac{v_p}{\xi_p}=A$
ξ_p
τ_p
τ_p/τ_n

(a)



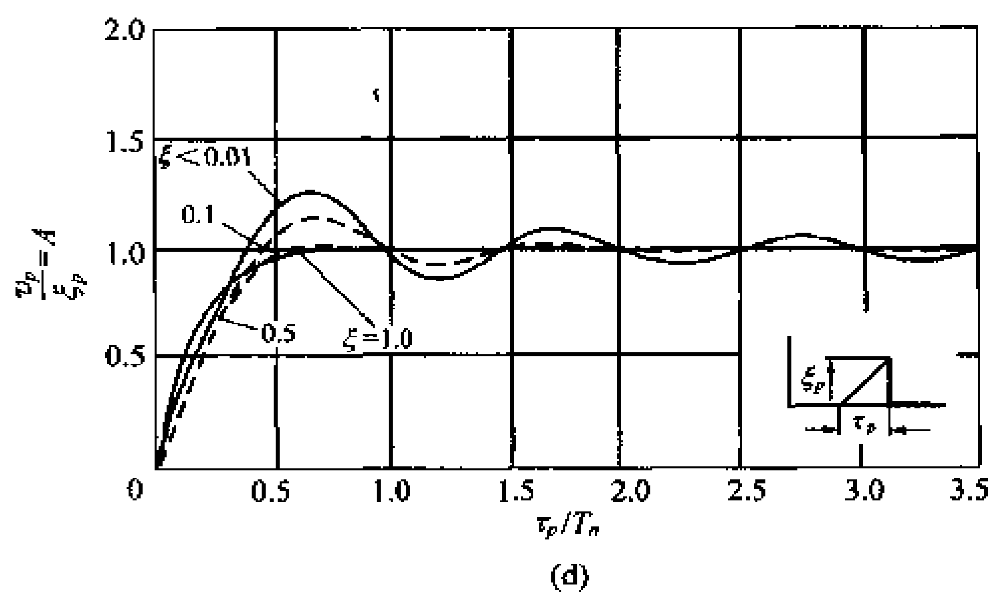
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
$\xi<0.01$
0.1
0.5
$\xi=1.0$
$\frac{v_p}{\xi_p}=A$
ξ_p
τ_p
τ_p/τ_n

(b)

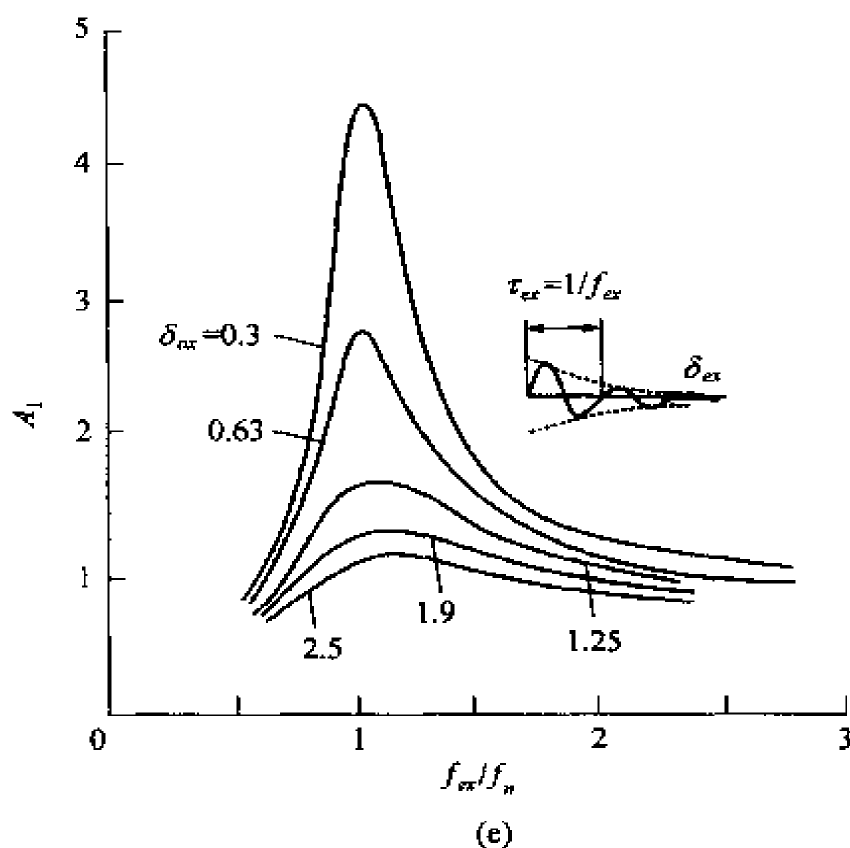


2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
$\xi<0.01$
0.1
0.5
$\xi=1.0$
$\frac{v_p}{\xi_p}=A$
ξ_p
τ_p
τ_p/T_n

(c)



(d)



(e)

图 5－36　单自由度系统在不同脉冲激励作用下绝对响应的冲击谱

(a) 矩形脉冲；(b) 半正弦脉冲；(c) 正矢脉冲；(d) 斜坡脉冲；(e) 衰减正弦脉冲。

隔振物体之间的相对振动的冲击谱

$$A_{rel} = | v(t) - \xi(t) |_{peak}]/\xi_p \tag{5-110}$$

这里 ξ 和 v 应该表示相同的动态系统参数，例如，如果 ξ 表示图 5－2(a)中基础 m_f 的位移脉冲，那么 v 就是质量 m 的强迫振动位移；或者如果 ξ 是作用在质量 m 上的脉冲力，那么 v 是传递到基础 m_f 上的力。

图 5－35 和图 5－36 中的曲线都是假设 $m_f=\infty$ 而得出的，如果 m_f 有限，那么响应 v 和冲击谱 A 需要进行修正。冲击谱的修正值为

$$A_f = \frac{m_f}{m+m_f}A \tag{5-111}$$

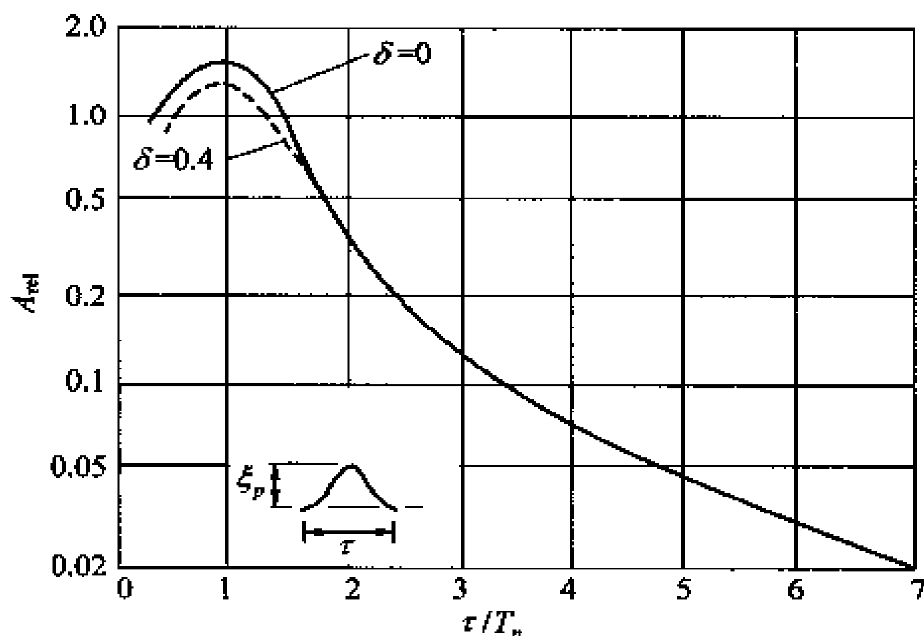


图 5－37　正矢脉冲作用下系统产生的相对振动的“冲击谱”

图 5－35 表明，当 $\tau_p/T_n \leqslant 0.5$ 时，系统响应的最大幅值出现在脉冲结束之后，而如果脉冲持续时间较长，那么它将在脉冲持续时间内发生。对于隔振系统的设计来说一个非常重要的性质是：在第一次近似中，各种不同脉冲激励下响应时间历程的第一部分

（强度最大的部分）都与正失脉冲信号的形状类似，特别是当 $\tau_p \ll T_n$ 时。该"响应"脉冲的持续时间可以由图 5－38 确定[22]。由于通常情况下只对响应的峰值以及第一个脉冲的形状和持续时间感兴趣，因此，上述近似方法在评估脉冲在隔振系统中的传播情况时非常有用。通过计算脉冲激励函数的频谱成分，并且应用式（5－101）可以得到更加准确的分析结果。

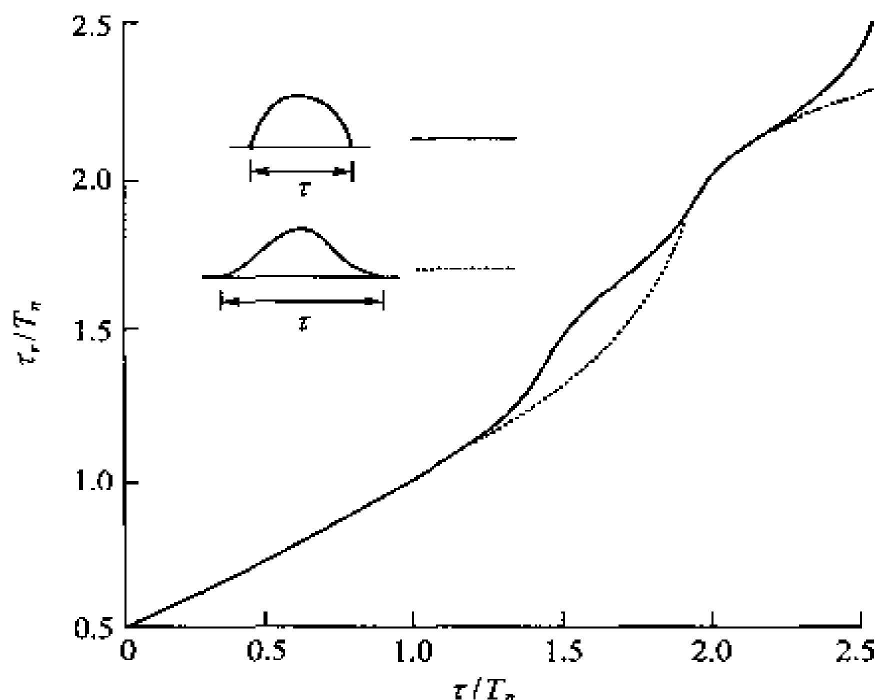


图 5－38　半正弦和正矢脉冲作用下（持续时间为 τ_p）系统产生的正矢响应（持续时间为 τ_r）（近似值）

对无阻尼系统而言，半正弦脉冲（A_1）和正矢脉冲（A_2）的冲击谱可以表示为如下解析形式[17]

$$A_1 = \frac{(T_n/\tau_p)(\cos\pi\tau_p/T_n)}{(T_n/2\tau_p)^2 - 1}; \qquad A_2 = \frac{\sin\pi\tau_p/T_n}{1-(\tau_p/T_n)^2} \tag{5-112}$$

当 $\tau_p \ll T_n$ 时（该情况的典型例子如锻锤的隔振），有

$$A_1 \approx \frac{4\tau_p}{T_n}\cos\frac{\pi\tau_p}{T_n}; \qquad A_2 \approx \pi\tau_p/T_n \tag{5-113}$$

对有阻尼系统而言，在脉冲激励下会出现如下现象：当 $t > \tau_p$ 时，响应会迅速地衰减，并且响应函数的峰值会一定程度的降低（见图 5－36）。当 t 在 $5\%\tau_p$ 内时，阻尼对半正弦和正矢脉冲激励下的冲击谱的影响可以表示为

$$A_d \approx A_o(1-0.14\delta) \qquad (5-114)$$

式中：A_d 是考虑阻尼时的冲击谱；A_o 是不考虑阻尼时的冲击谱。

参考文献

[1] 严济宽. 机械振动隔离技术. 上海：上海科学技术出版社，1986.

[2] Rivin E I. Passive Vibration Isolation. New York: ASME Press, 2003.

[3] Snowdon J C. Handbook of Vibration and Noise Control. Report TM 79 – 75. U.S. Department of the Navy, 1979.

[4] Rivin E I. Stiffness and Damping in Mechanical Design. New York: Marcel Dekker Inc., 1999.

[5] Derby T F. And P. C. Calcaterra. Response and Optimization of an Isolation System with Relaxation Type Dampers. NASA Report CR – 1542.

[6] Ruzicka J E and Cavanaugh R D. New Method for Vibration Isolation. Machine Design. 1958, Oct. 16, 114 – 121.

[7] Rivin E I. Dinamika Privoda Stankov [Dynamics of Machine Tool Drives], Moscow: Mashinostroenie Publishing House, 1967 [in Russian].

[8] DeBra D B. Vibration Isolation of Precision Machine Tools and Instruments. Annals of the CIRP. 1992, Vol. 41 No. 2: 711 – 718.

[9] Rivin E I. Vibration Isolation Systems with Constant Natural Frequency Isolators. Izvestiya VUZov. Mashinostroenie. 1966, No. 3: 62 – 68 [in Russian].

[10] Himelblau H and Rubin S. Vibration of a Resiliently Supported Rigid Body. Ch. 3 in Shock and Vibration Handbook. Edited by C. Harries, 3rd Edition. New York: McGraw – Hill, 1988.

[11] Crede C E. Vibration and Shock Isolation. New York: John Wiley & Sons, 1951.

[12] Rivin E I. Some Issues of Vibration Isolation of Machine Tools. In Dinamika Machin, Moscow: Nauka Publishing House, 1969 [in Russian].

[13] Polungian A A and Novokshonov V K. Analysis of Focal Equi – Frequency Ring – Like Car Engine Suspension. Izvestiya VUZov. Mashinostroenie, 1985, No. 12:

86 – 89 [in Russian].

[14] Military Standard MIL – STD – 810E. Environmental Test Methods. U. S. Department of Defence, 1988.

[15] Miles J W and Thomson W T. Statistical Concepts in Vibration. Ch. 11 in Shock and Vibration Handbook, edited by C. Harris, 3rd Edition, New York: McGraw – Hill, 1988.

[16] Veprik A M. Babitsky V I. et al. Vibration Protection for Linear Split Stirling Cryogenic Cooler of Airborne Infrared Application. Shock and Vibration, 2000, Vol. 7 No. 6: 363 – 381.

[17] Jacobsen L S and Ayre R S. Engineering Vibrations. New York: McGraw – Hill, 1958.

[18] Jacobsen L S and Ayre R S. Transient Response to Step and Pulse Functions. Ch. 7 in Shock and Vibration Handbook, edited by C. Harris and C. E. Crede, New York: McGraw – Hill, 1961.

[19] Application Selection Guide. Bulletin C5 – 178. Barry Wright Corp., 1978.

[20] Jarausch R. Hammer, Fundament and Umgebung als Schwingungsystem. Maschinenmarkt. 1965, Vol. 71, No. 11: 27 – 38.

[21] Rivin E I. Vibration Isolation of Precision Equipment. Precision Engineering. 1995, Vol. 17: 41 – 56.

[22] Rivin E I. Evaluation of Vibration Isolation Systems for Forging Hammers. In Meeting Handbook on Vibration Isolation of Heavy Structures. Institute of Acoustics, London, 1987.

第6章 隔振效果影响因素

传统的振动隔离,在分析问题时假定:被隔振的物体是一个没有任何弹性的理想质量块,隔振器由没有质量的理想弹簧和理想阻尼器并联而成,基础是一刚体,其质量无限大。由这些假设可以得出:对于简单隔振装置,只要激振频率大于系统固有频率的$\sqrt{2}$倍就有隔振效果,且激振频率越高隔振效果越好,一般可衰减40dB～60dB。但实际上,简单隔振装置很少能衰减20dB以上,即使采用了双层隔振装置,在高频区仍难以达到理想的衰减效果,且频率越高,实际的和预期的差值越大,究其原因不外乎如下几个方面[1,2]。

(1) 被隔振设备的质量不是理想地集中,在高频时往往显得刚性不足,致使在声频范围内有许多共振频率。

(2) 隔振器并不是一个理想化的元件,而是具有一定质量的弹性体,在高频下要产生驻波效应。此外,弹性元件的动态特性是随着频率面变化的,且它的阻尼大都为滞后阻尼,其频率响应特性不同于传统假设的黏性阻尼。

(3) 基础不是一个绝对刚性体,而是有一定弹性的,其质量也不是无限大的,因此在传递力的作用下会引起基础响应,产生很多共振峰。

这几方面的综合结果,使得传递率曲线在高频时向上翘,并且出现很多共振峰,从而降低了高频区的隔振效果。

在影响传递率的诸因素中基础的柔性是最重要的因素[3]。研究非刚性支承结构上设备安装的问题对一些交通工具来说相当重要,如汽车发动机、水面船舶、潜艇、飞机上的机械等。此外,随

着土地价格的趋高，将生产设备安装在较高楼层上也相当普遍。

6.1 基础柔性对隔振效果的影响

5.2 节给出了具有黏性阻尼和迟滞阻尼的隔振系统的力传递率表达式，见式（5－6）和式（5－18）。在低频振动隔离中，由于设备的阻抗相对基础的阻抗来说较小，故由上述公式推得的传递率，可以得到预期的效果。但对于高频振动的隔离，情况就完全不一样了，基础不能看作完全刚性的了，而是具有一定的阻抗。

用阻抗表示的隔振系统及刚性安装系统示于图 6－1[4]，图中符号的意义：

F_1——作用在设备上的扰动力；

V_1，V_{1R}——分别为在弹性及刚性安装情况下设备的振动速度；

F_2，V_2——弹性安装时传至非刚性基础上的力及基础的振动速度；

F_{2R}，V_{2R}——刚性安装时传至非刚性基础上的力及基础的振动速度；

Z_M，Z_I，Z_F——分别为设备、弹性支承（隔振器）及基础的机械阻抗，均为频率的复函数。

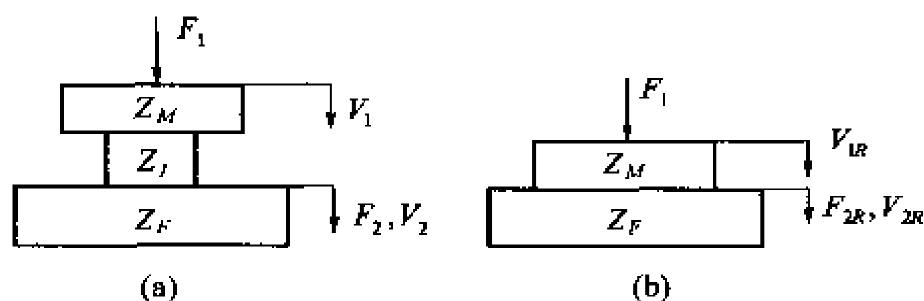


图 6－1 弹性及刚性安装系统示意图

（a）弹性安装系统；（b）刚性安装系统。

作用在设备上及基础上的力和速度之间的关系可用如下四端参数方程描述

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \tag{6-1}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ V_{1R} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{2R} \\ V_{2R} \end{pmatrix} \tag{6-2}$$

由式(6-1)得

$$F_1 = \frac{Z_I + Z_M}{Z_I} F_2 + Z_M V_2 \tag{6-3}$$

基础的阻抗在刚性和弹性安装两种情况下是相同的，即

$$Z_F = \frac{F_2}{V_2} = \frac{F_{2R}}{V_{2R}} \tag{6-4}$$

将基础阻抗代入式(6-3)并整理得

$$T_A \equiv \left| \frac{F_2}{F_1} \right| = \left| \frac{Z_I \cdot Z_F}{Z_I \cdot Z_M + Z_I \cdot Z_F + Z_M \cdot Z_F} \right| \tag{6-5}$$

这是用阻抗表示的力传递率。若将设备视为一质量为 M 的刚体，将隔振器简化为具有一定刚度 K 和阻尼 C 的理想元件，则 Z_M、Z_I 的表达式为

$$Z_M = \mathrm{i}\omega M \tag{6-6}$$

$$Z_I = \frac{K}{\mathrm{i}\omega} + C \tag{6-7}$$

更多的时候，隔振器是用四端参数 $\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$ 而不是阻抗来表示，则作用在设备上及基础上的力和速度之间的关系变为

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ V_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (\beta_{11}+Z_M\beta_{21}) & (\beta_{12}+Z_M\beta_{22}) \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} F_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \qquad (6-8)$$

进一步可得力传递率为

$$T_A = \left|\frac{Z_F}{(\beta_{11}+\beta_{21}Z_M)Z_F+(\beta_{12}+\beta_{22}Z_M)}\right| =$$

$$\left|\frac{Z_F}{(\beta_{11}+\mathrm{i}\omega M\beta_{21})Z_F+(\beta_{12}+\mathrm{i}\omega M\beta_{22})}\right| \qquad (6-9)$$

在不考虑隔振器质量的情况下，$\beta_{11}=\beta_{22}=1$，$\beta_{12}=0$，$\beta_{21}=1/Z_I$，代人式(6－9)即得式(6－5)。

式(6－5)和式(6－9)表明，隔振系统的传递率不仅与隔振器的特性有关，而且还与基础的阻抗有关。下面分两种基础假设来分析基础柔性对传递率的影响。

6.1.1 把基础简化成具有一个自由度的集中参数系统

把基础简化成为具有一个等效质量、一个等效刚度和一个等效阻尼的动力学模型后，整个系统的计算模型和机械线路图如图6－2所示[5]。如果把机械阻抗取为位移阻抗，图中各要素的位移阻抗为

$$Z_1=-\omega^2 m_1, Z_2=k_1, Z_3=\mathrm{i}\omega c_1, Z_4=-\omega^2 m_f,$$

$$Z_5=k_f, Z_6=\mathrm{i}\omega c_f$$

Z_2 和 Z_3 并联为 Z_7：$Z_7=Z_2+Z_3$

Z_4、Z_5 和 Z_6 并联为 Z_8：$Z_8=Z_4+Z_5+Z_6$

Z_7 和 Z_8 串联为 Z_9：$Z_9=\dfrac{Z_7\cdot Z_8}{Z_7+Z_8}$

Z_1 和 Z_9 并联为 Z_{10}：$Z_{10}=Z_1+Z_9$

从图6－2(e)中可以看出，节点1的位移 x_1 为

$$x_1=\frac{F}{Z_{10}}=$$

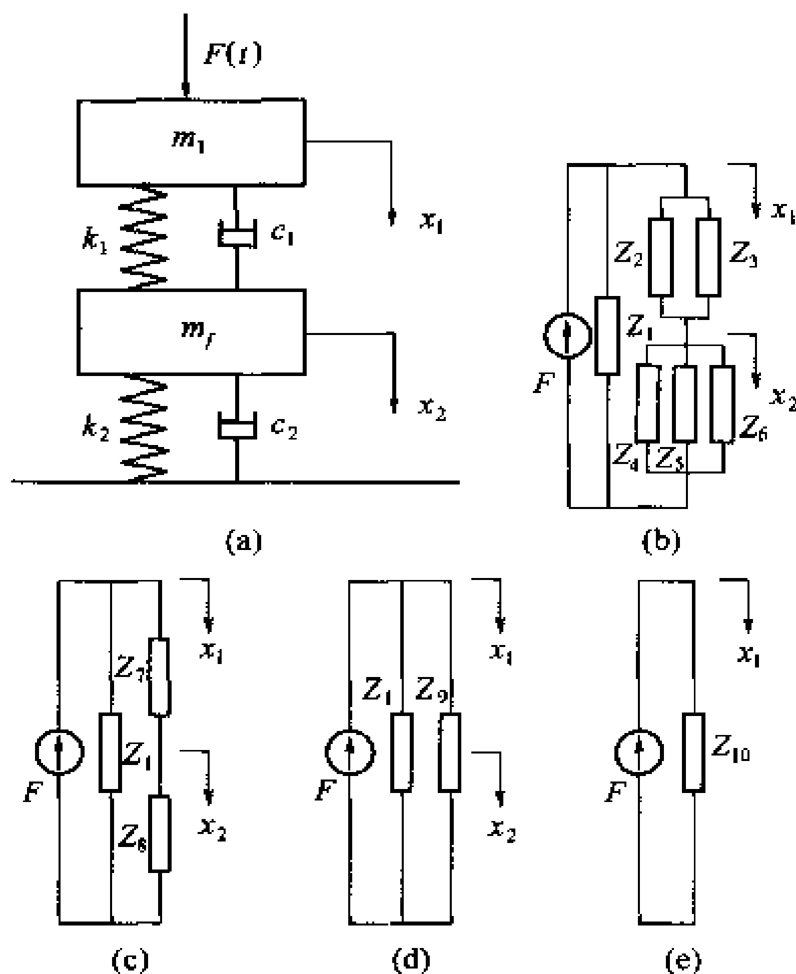


图 6－2　把基础简化为 1 个自由度的集总参数系统模型和机械线路图

$$\frac{(Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6)F}{Z_1(Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6)+(Z_2+Z_3)(Z_4+Z_5+Z_6)} \tag{6-10}$$

在节点 1 处，力由两部分构成，$F_{Z_1}=x_1\cdot Z_1$ 和 $F_{Z_9}=x_1\cdot Z_9$，其中 F_{Z_9} 为

$$F_{Z_9}=\frac{(Z_2+Z_3)(Z_4+Z_5+Z_6)F}{Z_1(Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6)+(Z_2+Z_3)(Z_4+Z_5+Z_6)} \tag{6-11}$$

F_{Z_9} 就是由弹簧 k_1 和阻尼器 c_1 传至基础 m_f 上的作用力。

于是得到传递率 T_A 的表达式为

$$T_A = \frac{|F_{Z_9}|}{|F|} =$$

$$\left|\frac{(Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5 + Z_6)}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6) + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5 + Z_6)}\right| \tag{6-12}$$

将各阻抗值代入上式得

$$T_A = \left| \left[\frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{k_f}{m_f} - \omega^2\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_1} \cdot \frac{c_f}{m_f}\right)\right] + \mathrm{i}\left[-\omega^3 \frac{c_1}{m_1} + \omega\left(\frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{c_f}{m_f} + \frac{k_f}{m_f} \cdot \frac{c_1}{m_1}\right)\right] \middle/ \right.$$

$$\left[\omega^4 - \omega^2\left(\frac{m_1}{m_f} \cdot \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_f}{m_f} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_1} \cdot \frac{c_f}{m_f}\right) + \frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{k_f}{m_f}\right] +$$

$$\left. \mathrm{i}\left[-\omega^3\left(\frac{m_1}{m_f} \cdot \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_f}{m_f}\right) + \omega\left(\frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{c_f}{m_f} + \frac{k_f}{m_f} \cdot \frac{c_1}{m_1}\right)\right] \right| \tag{6-13}$$

令 $k_1/m_1 = \omega_{n1}^2, k_f/m_f = \omega_{nf}^2, m_1/m_f = \mu, c_1/2\sqrt{m_1k_1} = \zeta_1, c_f/2\sqrt{m_fk_f} = \zeta_f, \omega_{n1}/\omega_{nf} = \lambda$，代入上式后求得

$$T_A = \left| \left[1 - (\lambda^2 + 2\zeta_1 \cdot 2\zeta_f\lambda)\left(\frac{\omega}{\omega_{n1}}\right)^2\right]^2 + \left[(2\zeta_1 + 2\zeta_f\lambda)\frac{\omega}{\omega_{n1}} - 2\zeta_1\lambda^2\left(\frac{\omega}{\omega_{n1}}\right)^3\right]^2 \middle/ \right.$$

$$\left[1 - (1 + \lambda^2 + \mu\lambda^2 + 2\zeta_1 \cdot 2\zeta_f\lambda)\left(\frac{\omega}{\omega_{n1}}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\omega}{\omega_{n1}}\right)^4\right]^2 +$$

$$\left. \left[(2\zeta_1 + 2\zeta_f\lambda)\frac{\omega}{\omega_{n1}} - (2\zeta_1\lambda^2 + 2\zeta_f\lambda + 2\zeta_1\lambda^2\mu)\left(\frac{\omega}{\omega_{n1}}\right)^3\right]^2 \right| \tag{6-14}$$

式(6－14)就是把基础简化为具有一个自由度的质量—弹簧—阻尼系统的传递率计算公式。

可以看出，T_A 是 λ、μ、ζ_1、ζ_f 和 ω/ω_{n1} 这五个变量的函数。以 ω/ω_{n1} 为变量，以 λ、μ、ζ_1、ζ_f 为参量，按式(6-14)计算得图6-3~图6-7。从这些图线所呈现的性态，可得出如下结论：

(1) 从图6-3~图6-5可以明显地看到，影响传递曲线性态的主要参数是质量比 $\mu = m_1/m_f$ 和频率比 $\lambda = \omega_{n1}/\omega_{nf}$。质量比 μ 越大，弹性基础传递曲线与刚性基础理论曲线差别就越大，反之就越小。频率比 λ 越大，两曲线差别就越大，反之就越小。

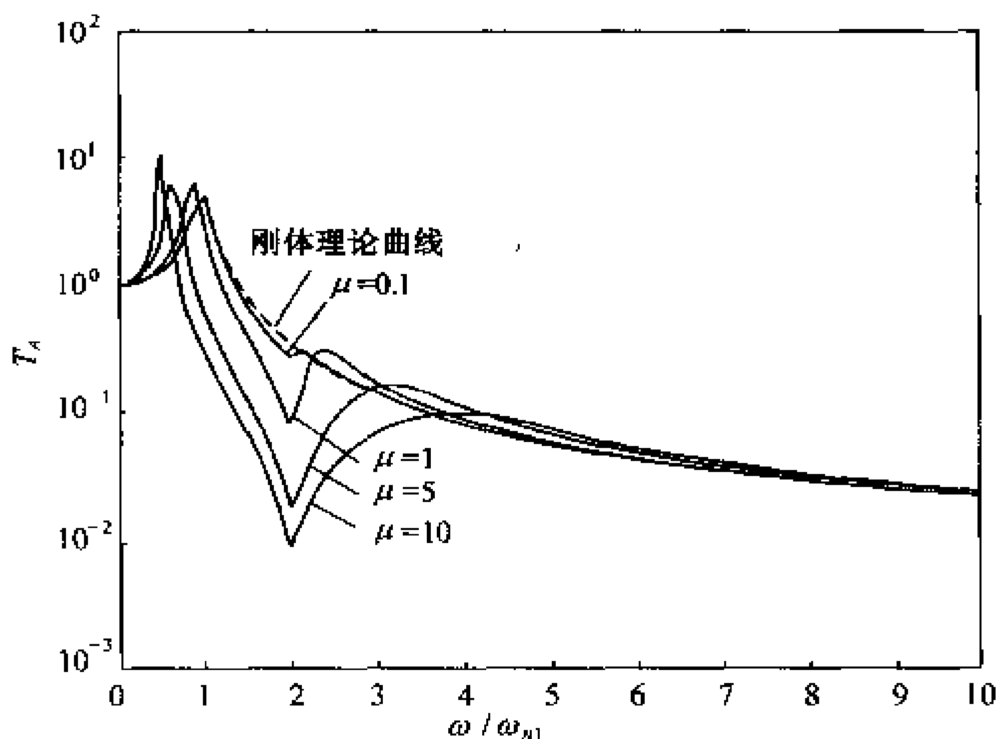


图6-3 基础为1自由度集中参数系统时的传递率曲线（$\zeta_1=0.1$，$\zeta_f=0.05$，$\lambda=0.5$）

(2) 从图6-4可以看出，当频率比 λ 小于0.1时，弹性基础传递曲线与刚性基础理论曲线基本吻合。从图6-5可以看出，当质量比 μ 小于0.1时，两曲线也吻合。这就是说，在这些条件下，弹性基础可视为刚性基础。

(3) 从图6-6~图6-7可以看出，阻尼比 ζ_1 和 ζ_f 仅影响曲线峰值的大小而不影响峰值的位置。并且，ζ_1 主要影响 ω_{n1} 处的峰值，ζ_f 主要影响 ω_{nf} 处的峰值。

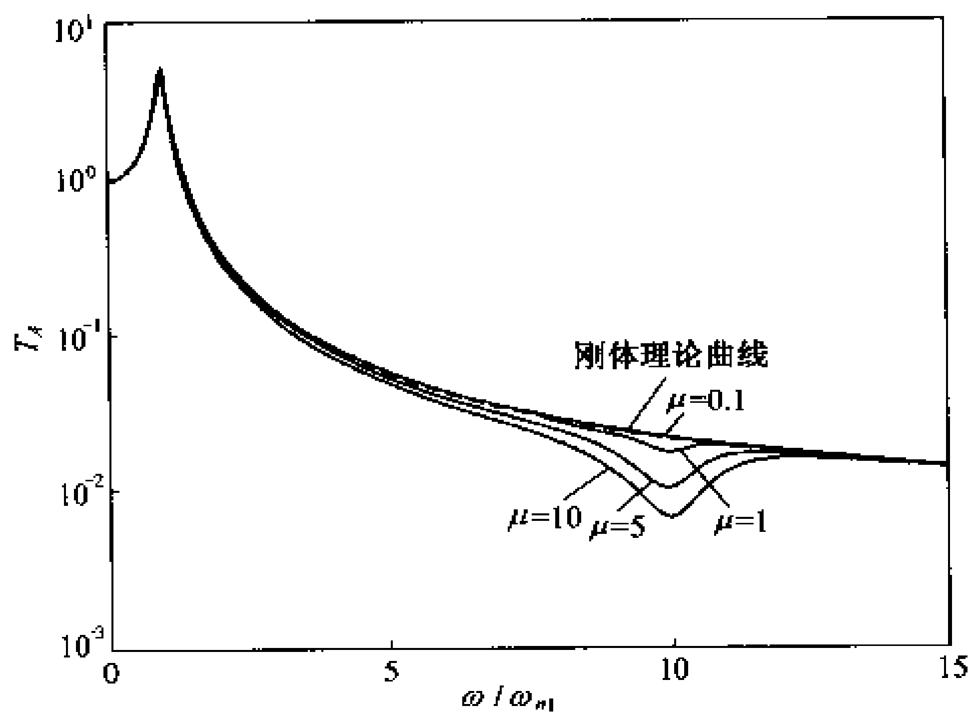


图 6－4　基础为 1 自由度集中参数系统时的传递率曲线（$\zeta_1=0.1, \zeta_f=0.05, \lambda=0.1$）

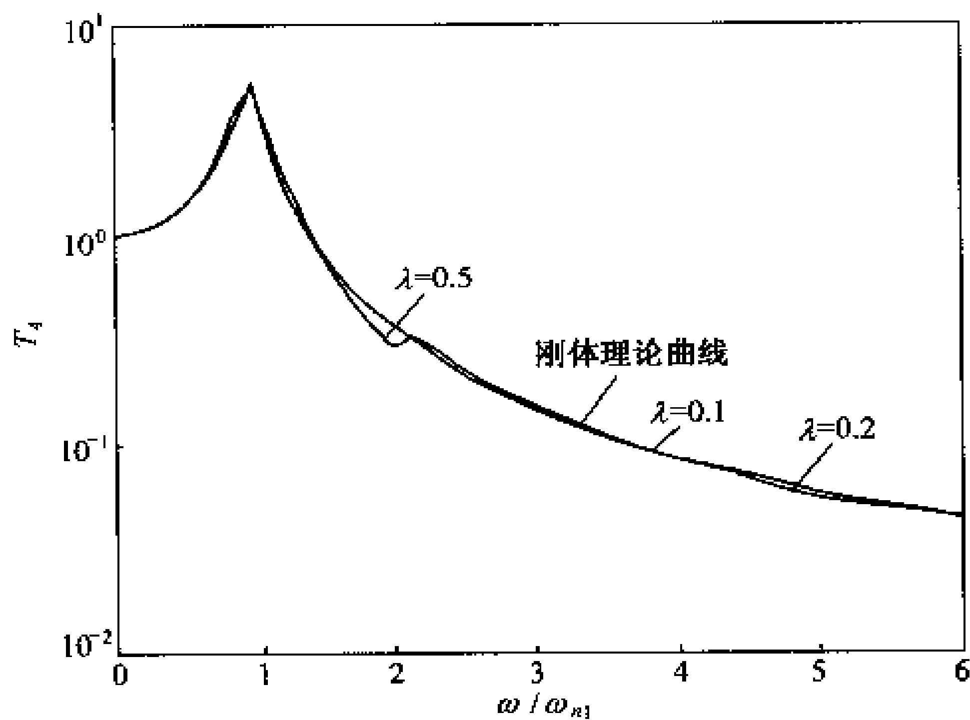


图 6－5　基础为 1 自由度集中参数系统时的传递率曲线（$\zeta_1=0.1, \zeta_f=0.05, \mu=0.1$）

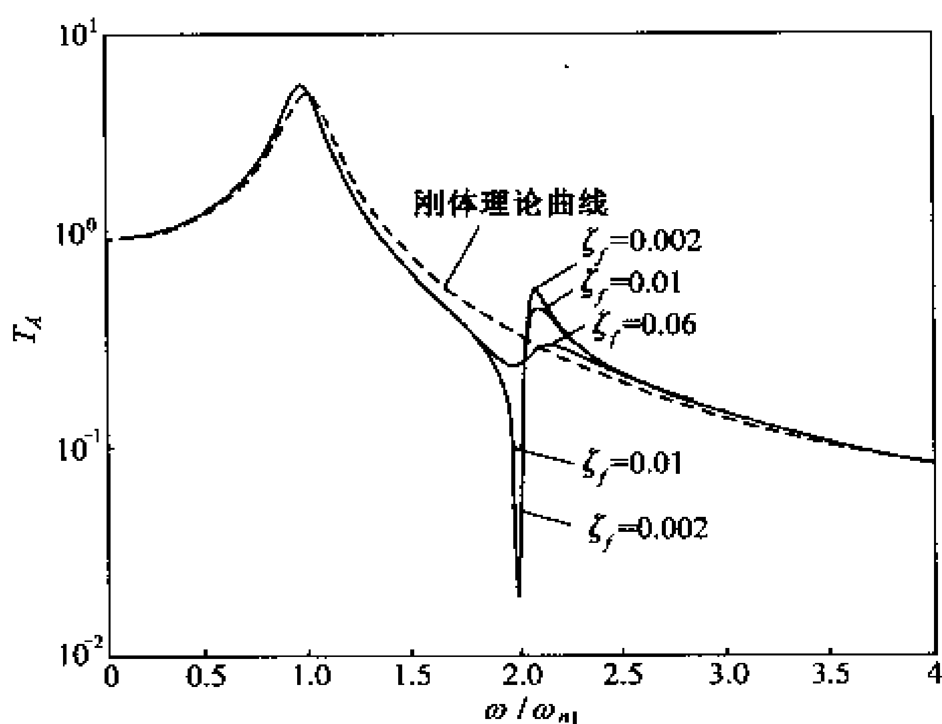


图 6-6 基础为 1 自由度集中参数系统时的传递率曲线($\zeta_1=0.1,\lambda=0.5,\mu=0.2$)

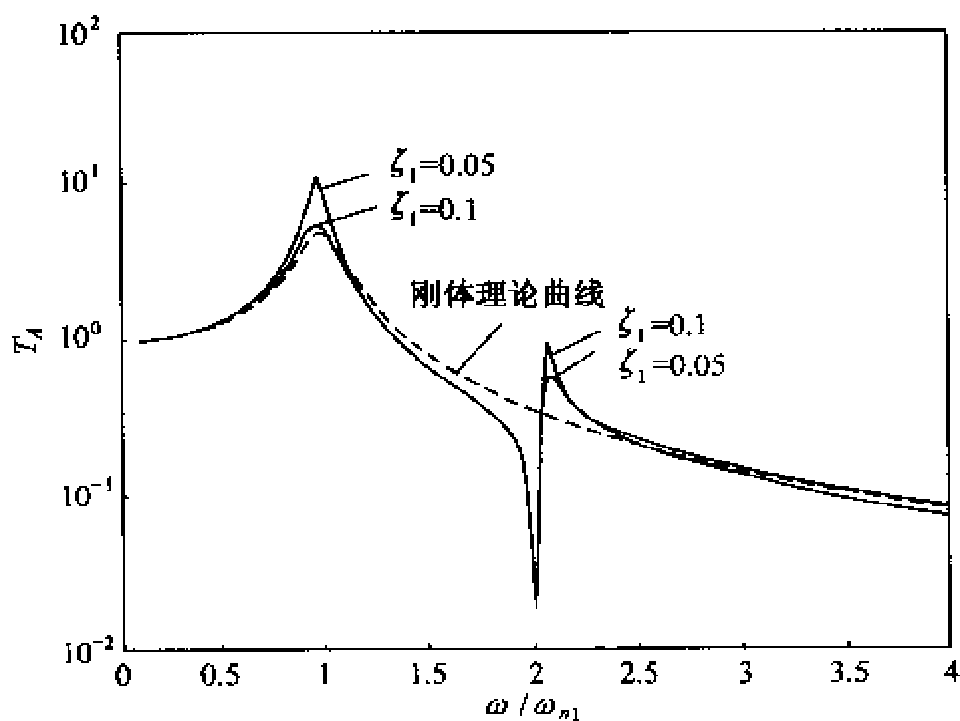


图 6-7 基础为 1 自由度集中参数系统时的传递率曲线($\zeta_f=0.002,\lambda=0.5,\mu=0.2$)

6.1.2 基础为弹性体的传递率问题

上一节将基础简化成具有1个自由度的集中参数系统，传递率曲线上有2个共振峰。为了进一步分析基础的柔性对于传递率的影响，把基础作为弹性体处理，为此选择一个四边简支矩形板作为隔振系统的基础。

1. 四边简支矩形板在简谐激励力作用下的导纳

四边简支矩形板如图6－8所示，假设在A、B、C、D四点同时作用着完全相同的简谐激励力 $F(t)=F_0\sin\omega t$。为了计算力传递率，需要知道各点的导纳（这里用位移导纳）。

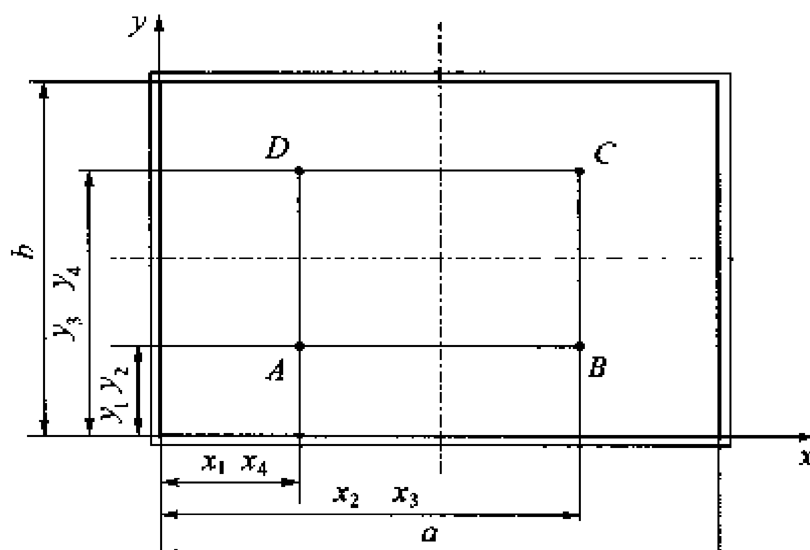


图6－8 四边简支矩形板

位移导纳就是简谐激励力激起的系统中某一点处位移响应与该简谐力之比。欲求图6－8中各点的位移导纳，关键就在于求四边简支矩形板在四个集中简谐激励力作用下受迫振动的位移解。

设在板上某一点 $S(\xi,\eta)$ 作用有集中力 $F(t)=F_0\sin\omega t$，则薄板振动的位移解为

$$u(x,y,t)=\frac{4F_0}{ab\,\overline{m}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{mn}^2-\omega^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t \quad (6-15)$$

式中

$$\omega_{mn}^2 = \pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\frac{D}{\overline{m}}, D = \frac{EH^3}{12(1-\sigma^2)} \qquad (6-16)$$

式中：$\overline{m}$ 为薄板质量面密度；E 为弹性模量；σ 为泊松比；H 为薄板的厚度；ω_{mn} 为薄板固有频率；D 为抗弯刚度。

根据力的独立作用原理，作用于 A、B、C、D 四点的激励力所激起的在 A 点处的位移响应，等于每个力单独作用所激起的位移响应的代数和。于是得到 A 点的位移响应为

$$u(A) = \sum_{j=1}^{4}\frac{4F_0}{ab\overline{m}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{mn}^2-\omega^2}\sin\frac{m\pi x_j}{a}$$

$$\sin\frac{n\pi y_j}{b}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi y_1}{b}\sin\omega t \qquad (6-17)$$

于是得到 A 点的位移导纳 $M(A)$ 为

$$M(A) = \frac{u(A)}{F} = \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{ab\overline{m}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{mn}^2-\omega^2}$$

$$\sin\frac{m\pi x_j}{a}\sin\frac{n\pi y_j}{b}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi y_1}{b} \qquad (6-18)$$

A 点的位移响应表达式可以改写为

$$u(A) = \frac{4F_0}{ab\overline{m}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{mn}^2-\omega^2}\sin\frac{m\pi x_1}{a}$$

$$\sin\frac{n\pi y_1}{b}\left(\sum_{j=1}^{4}\sin\frac{m\pi x_j}{a}\sin\frac{n\pi y_j}{b}\right)\sin\omega t \qquad (6-19)$$

因为 A、B、C、D 四点关于板面的两条中线对称（如图 6－8 所示），所以当 $m=2,4,6,\cdots$ 或 $n=2,4,6,\cdots$ 时，$\sum_{j=1}^{4}\sin\frac{m\pi x_j}{a}\sin\frac{n\pi y_j}{b}=0$。式中 $x_j, y_j (j=1,2,3,4)$ 系指激励力作用点的坐标。由此可得出

重要结论：在 A、B、C、D 四点作用同样的简谐激励力，薄板仅产生关于板面的两条中线对称的振型。也就是说，A、B、C、D 四点的位移响应和位移导纳是相同的。

2. 用四端参数法求解系统的传递率

（1）基本机械元件的四端参数

质量：
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = [M_{jk}]\begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -m\omega^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

弹簧：
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = [K_{jk}]\begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (6-21)$$

阻尼：
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = [C_{jk}]\begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/ic\omega & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (6-22)$$

（2）串、并联系统的四端参数

串联系统如图 6－9(a) 所示，其四端参数可由下式计算

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = [\alpha_{jk}^{(1)}][\alpha_{jk}^{(2)}]\cdots[\alpha_{jk}^{(n)}]\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ X_{n+1} \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

式中：$[\alpha_{jk}^{(m)}]$$(m=1,2,\cdots,n)$ 为各串联子系统的四端参数。

并联系统如图 6－9(b) 所示，其四端参数可由下列公式计算

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = [\alpha_{jk}]\cdot\begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

式中：$\alpha_{11}=A/B$，$\alpha_{12}=AC/B-B$，$\alpha_{21}=1/B$，$\alpha_{22}=C/B$；

$$A=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_{11}^{(j)}}{\alpha_{21}^{(j)}}\right),B=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_{21}^{(j)}}\right),C=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_{21}^{(j)}}{\alpha_{22}^{(j)}}\right)。$$

利用上面公式可求出弹簧—阻尼并联系统的四端参数

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/(k+ic\omega) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

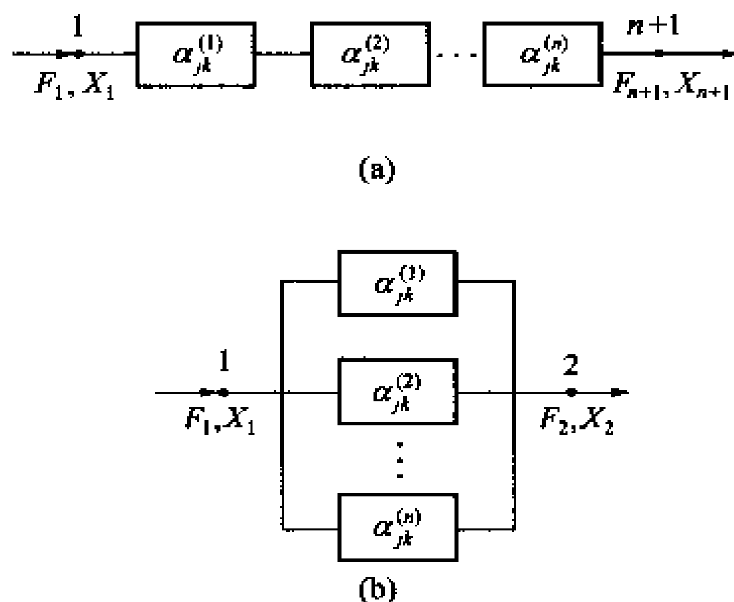


图 6－9　串、并联系统及其四端参数

（a）串联系统；（b）并联系统。

（3）应用四端参数法于基础为四边简支矩形板的隔振系统

被隔振设备通过四只隔振器支承于四边简支矩形板基础上，如图 6－10(a)所示。在这里，假定被隔振设备有两个铅直的对称面，激励力通过设备的中心，四只隔振器对称地布置在四只角上。由前面的分析知，该隔振系统的动力学模型如图 6－10(b)所示。

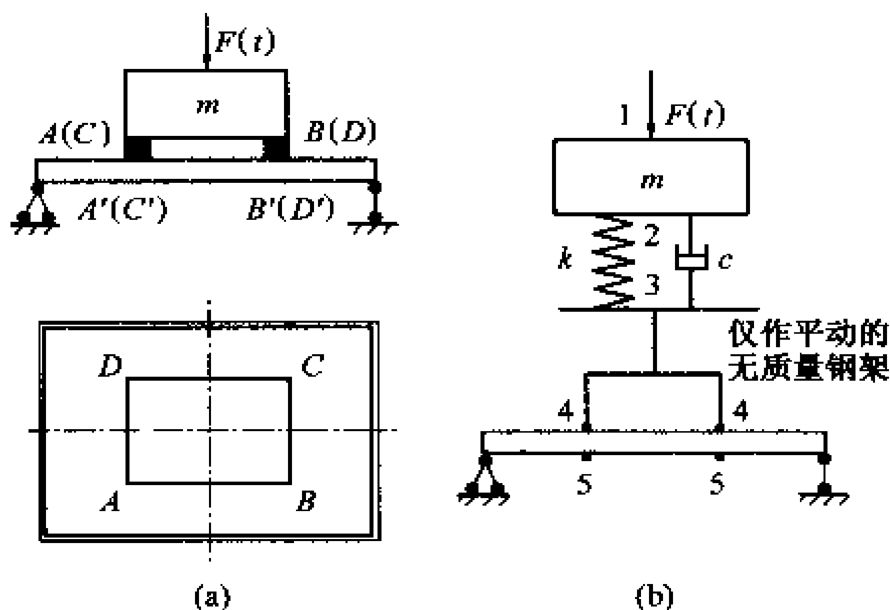


图 6－10　基础为四边简支矩形板的隔振系统

图中 m 为被隔振设备的质量；k 指的是 4 只隔振器的刚度之和，即等于单只隔振器刚度的 4 倍；c 也指的是 4 只隔振器作为一个总体的阻尼系数，它也等于单只隔振器阻尼系数的 4 倍。点“4”指 A、B、C、D 四点。隔振系统的等效四端参数系统如图 6－11 所示。对该线路图进行分析整理，可以简化为图 6－12 来研究。

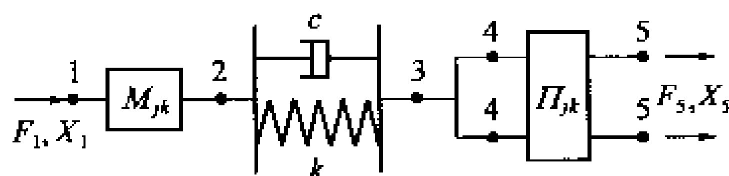


图 6－11　等效的四端参数系统线路图

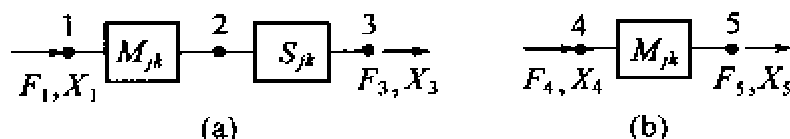


图 6－12　简化的四端参数系统线路图

对图 6－12(a)有

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = [M_{jk}][S_{jk}]\begin{bmatrix} F_3 \\ X_3 \end{bmatrix} \tag{6－26}$$

式中：$[S_{jk}]$ 是刚度和阻尼并联而构成的组合系统的四端参数。由式(6－25)知

$$[S_{jk}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/(k + \mathrm{i}c\omega) & 1 \end{bmatrix} \tag{6－27}$$

根据力和位移的分析，有

$$\begin{cases} F_4 = \dfrac{1}{4}F_3 \\ X_4 = X_3 \end{cases}$$

写成矩阵形式即为

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_4 \\ X_4 \end{bmatrix} \tag{6-28}$$

再看图 6－12(b)，点“4”实际上代表平板的上表面 A、B、C、D 四点之中的任何一点。与此类似，点“5”代表平板的下表面 A'、B'、C'、D'四点之中的任何一点。如前所述，当平板在 A、B、C、D 四点同时作用着一个等幅、同频、同相位的激励力 F_4 时，在点 A 处（或 B 或 C 或 D）引起的位移响应 X_4 与 F_4 之比定义为导纳 $M(A)$，即 $M(A) = X_4/F_4$。考虑到 $X_4 = X_5$，有

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{M(A)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_5 \\ X_5 \end{bmatrix} \tag{6-29}$$

将式(6－20)、式(6－27)～式(6－29)代入式(6－26)，得

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\left(1 - \dfrac{m\omega^2}{k + \mathrm{i}c\omega}\right) & \left[4\left(1 - \dfrac{m\omega^2}{k + \mathrm{i}c\omega}\right)\dfrac{1}{M(A)} - m\omega^2\right] \\ \dfrac{4}{k + \mathrm{i}c\omega} & \left[\dfrac{4}{k + \mathrm{i}c\omega}\dfrac{1}{M(A)} + 1\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_5 \\ X_5 \end{bmatrix} \tag{6-30}$$

注意到在平板下表面点 A'处并无任何外界约束，故该点作用于外界的力 F_5 不存在。于是有

$$F_1 = \left[4\left(1 - \frac{m\omega^2}{k + \mathrm{i}c\omega}\right)\frac{1}{M(A)} - m\omega^2\right]X_5 \tag{6-31}$$

又因为 $X_5 = X_4 = M(A)F_4$，$F_3 = 4F_4$，代入上式得

$$\frac{4F_4}{F_1} = \frac{F_3}{F_1} = \frac{k + \mathrm{i}c\omega}{\left[\left(1 - m\omega^2\dfrac{M(A)}{4}\right)k - m\omega^2\right] + \mathrm{i}c\omega\left(1 - m\omega^2\dfrac{M(A)}{4}\right)} \tag{6-32}$$

于是得力的传递率 T_A 为

$$T_A = \left|\frac{F_3}{F_1}\right| =$$

$$\frac{\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}}{\left[\left(1 - m\omega^2 \frac{M(A)}{4}\right)k - m\omega^2\right]^2 + c^2\omega^2\left(1 - m\omega^2 \frac{M(A)}{4}\right)^2}$$

(6 - 33)

令 $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m}, \zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}, \beta = \dfrac{\omega}{\omega_n}$，则有 $\dfrac{c\omega}{k} = 2\zeta\beta$，代入式(6 - 33)并将右端分子分母同除以 k，得

$$T_A = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\left[1 - \beta^2 - m\omega^2 \frac{M(A)}{4}\right]^2 + (2\zeta\beta)^2\left[1 - m\omega^2 \frac{M(A)}{4}\right]^2}$$

(6 - 34)

令 $Q = m\omega^2 M(A)/4$，则

$$T_A = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{(1 - \beta^2 - Q)^2 + (2\zeta\beta)^2(1 - Q)^2} \qquad (6 - 35)$$

将 $M(A)$ 的表达式(6 - 18)代入 Q 的表达式，其中的求和指标(m，n)替换为(p,q)，并注意到 $\beta = \omega/\omega_n$，有

$$Q = \frac{m}{ab\,\bar{m}}\beta^2 \sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_{pq}/\omega_n)^2 - \beta^2}$$

$$\sin\frac{p\pi x_j}{a}\sin\frac{q\pi y_j}{b}\sin\frac{p\pi x_1}{a}\sin\frac{q\pi y_1}{b} \qquad (6 - 36)$$

式(6 - 35)和式(6 - 36)就是弹性薄板基础的传递率。

3. 弹性薄板基础的传递率曲线

为了分析系统的各个动态特性参数对传递率的影响，赋予各个参数以一组离散数据代入式(6－35)和式(6－36)，绘出各种参数值时的传递率曲线，如图 6－13 和图 6－14 所示。各参数为：$a=1.2\text{m}, b=1.0\text{m}, H=0.0055\text{m}, \overline{m}=7.8e+3\text{kg/m}^3$，弹性模量 $E=2.02e+11\text{Pa}$，泊松比 $\sigma=0.3, x_1=x_4=0.3\text{m}, x_2=x_3=0.9\text{m}, y_1=y_2=0.25\text{m}, y_3=y_4=0.75\text{m}$，隔振器阻尼比 $\zeta=0.05$，图 6－14 中隔振系统固有频率 $\omega_n=25\text{Hz}$，图 6－14 中隔振系统固有频率 $\omega_n=11\text{Hz}$。从图 6－13 和图 6－14 可以看出：

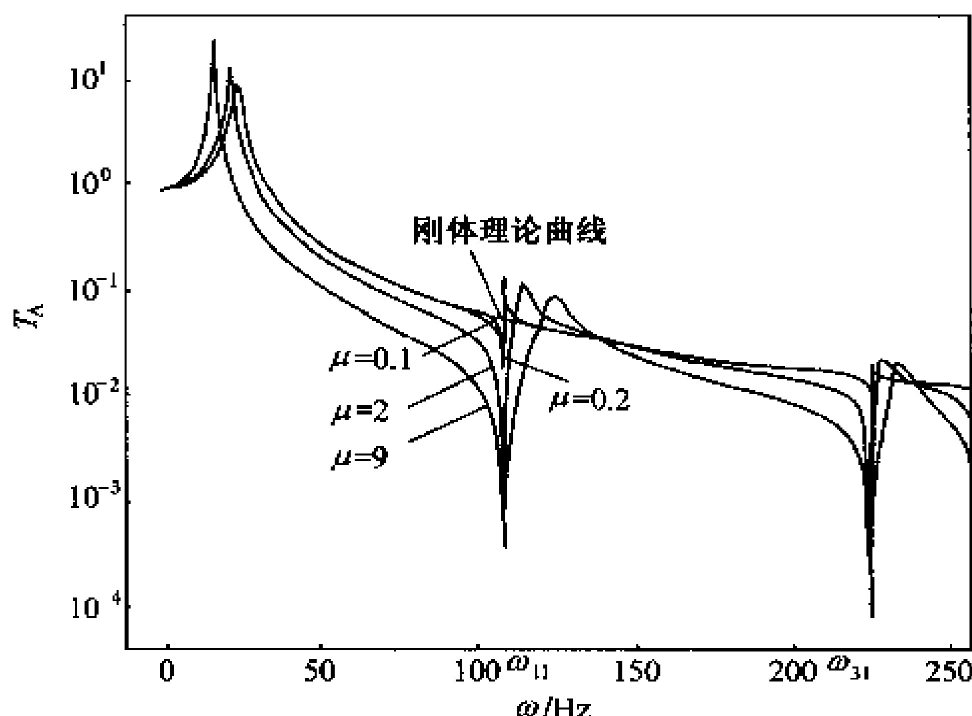


图 6－13　四边简支矩形板上隔振系统的传递率($\lambda=0.23$)

(1) 弹性基础的传递率曲线与刚性基础有较大的差别：刚性基础传递率曲线仅在 ω_n 处出现一次峰值，尔后陡然跌落。而弹性基础传递率曲线在 ω_n 之前即出现峰值，在基础的第(1,1)阶固有频率 ω_{11}(基频)处出现谷值，随即又出现峰值，尔后在基础的更高阶固有频率处转为谷值。如此峰谷交替多次出现。但如果基础的某阶固有振型不被激发，则曲线在这些阶数的固有频率处并不出现谷值。

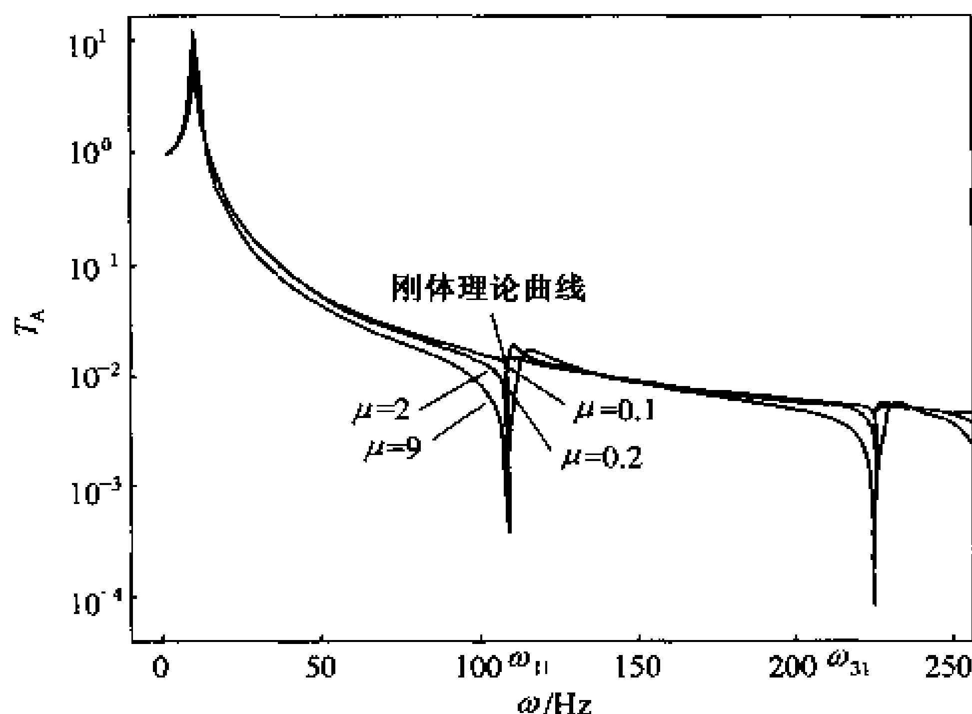


图 6-14 四边简支矩形板上隔振系统的传递率($\lambda=0.1$)

(2) 频率比 $\lambda=\frac{\omega_n}{\omega_{11}}$和质量比 $\mu=\frac{m}{m_{eq}}$(m_{eq}是基础的一阶当量质量)是影响弹性基础传递率曲线性态的主要参数。λ 越大,弹性基础的传递率曲线与刚性基础理论曲线的差异越大,反之就越小。μ 越大,两曲线的差异也越大,反之越小。

(3) 当频率比 λ 小于 0.1 时,或者质量比 μ 小于 0.1 时,弹性基础传递曲线与刚性基础理论曲线相差甚微。在这种条件下,实际基础可视为刚性基础。

6.2 被隔振设备的弹性对隔振效果的影响

被隔振设备的非刚性对隔振效果也有较大影响,本节将用四端参数方法来分析这种影响。假定被隔振设备的动力特性可用四端参数 α_{jk}来表征,则在图 6-1 中作用在物体上的力 F_1 和速度 V_1 和作用在基础上的力 F_2 和速度 V_2 之间可建立如下的四端参数方程

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{6-37}$$

式中：β_{jk}是隔振器的四端参数；ψ_{jk}则是被隔振设备与隔振器串联后的四端参数。

$$\begin{cases} \psi_{11} = \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} \\ \psi_{12} = \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \psi_{21} = \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} \\ \psi_{22} = \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{cases} \tag{6-38}$$

鉴于式(6－37)与式(6－8)是相似的，因此可按同样的步骤很容易得出

$$T_A = \left|\frac{F_2}{F_1}\right| = \left|\frac{Z_F}{\psi_{11}Z_F + \psi_{12}}\right| =$$

$$\left|\frac{Z_F}{(\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21}) \cdot Z_F + (\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22})}\right| \tag{6-39}$$

式中：Z_F 是基础的机械阻抗。另外，不难看出，当被隔振设备是一理想的刚性质量块 M 时，$\alpha_{11} = 0$，$\alpha_{12} = \mathrm{i}\omega M$，$\alpha_{21} = 0$，$\alpha_{22} = 1$，则式(6－39)即成为式(6－9)。

下面将讨论一刚性物体通过非刚性机脚弹性地安装在刚性基础上的振动传递特性。如图 6－15(a)所示[1]，一台发动机通过一刚性不足的机架弹性地安装在基础上，机架的形状做成凹弓形以使弹性支承的安装面正好落在机组的重心平面内。这个结构可用图 6－15(b)来模拟，这时机器本体部分仍假设为绝对刚体，质量

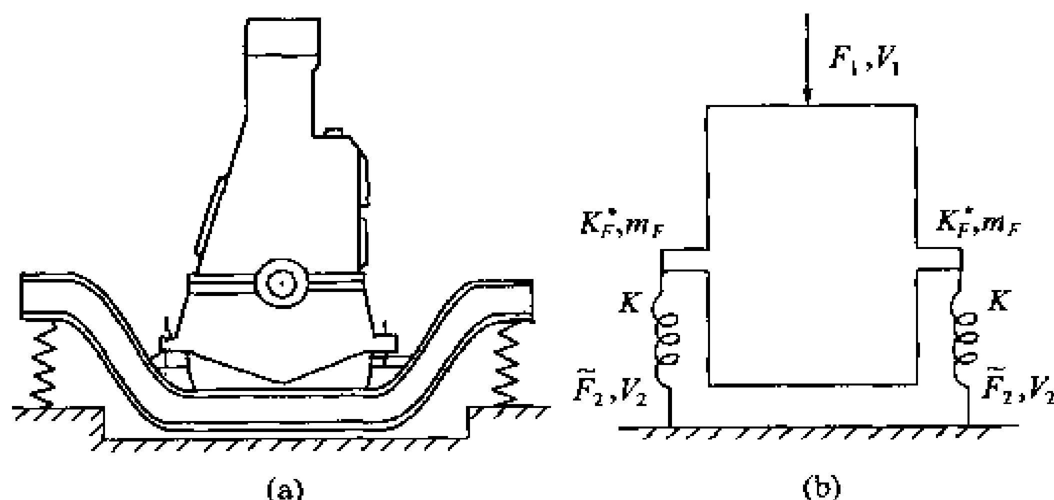


图 6-15 具有非刚性机脚的机械设备的弹性安装实例及其简化模型

为 M，机脚部分可假设成一受剪的短梁，其长深比接近于 3 或更小些，这样实际上就可以认为当此短梁承受载荷时，由于弯曲而引起的变形将大大小于由剪切所引起的变形，所以就可按剪切特性来进行计算。设每个机脚的质量为 m_F，垂向的复刚度为 K_F^*，隔振器为橡胶隔振器时其刚度为 K^*。这样图 6-15(b)中的输入和输出的关系为

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i\omega M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2F_2 \\ V_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Y_1\beta_{11} + Y_2\beta_{21} & Y_1\beta_{12} + Y_2\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2F_2 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (6-40)$$

式中：α_{jk}, β_{jk} 分别为机脚和隔振器四端参数；$Y_1 = \alpha_{11} + i\omega M\alpha_{21}$；$Y_2 = \alpha_{12} + i\omega M\alpha_{22}$。设 $V_2 = 0$，则

$$T_A = \left| \frac{2F_2}{F_1} \right| = [(\alpha_{11} + i\omega M\alpha_{21})\beta_{11} + (\alpha_{12} + i\omega M\alpha_{22})\beta_{21}]^{-1} \quad (6-41)$$

质量连续分布系统的四端参数为[1]

$$\begin{cases} \alpha_{11} = \cos(n^* \cdot l) \\ \alpha_{12} = \mu_R^* \cdot \sin(n^* \cdot l) = \dfrac{i\omega(2m_F)}{(n^* \cdot l)} \cdot \sin(n^* \cdot l) \\ \alpha_{21} = \dfrac{-1}{\mu_R^*} \cdot \sin(n^* \cdot l) = \dfrac{-(n^* \cdot l)}{i\omega(2m_F)} \cdot \sin(n^* \cdot l) \\ \alpha_{22} = \cos(n^* \cdot l) \end{cases} \tag{6-42}$$

式中：n^* 为机脚处剪切梁的复波数，$n^* = \sqrt{\rho\omega^2/E_F^*} = \sqrt{2m_F\omega^2/K_F^* l^2}$；$K_F^*$ 为机脚的垂向复刚度，$K_F^* = K_F(1+i\eta_F)$；η_F 为机脚的阻尼损耗因子；K_F 为每个机脚的静刚度；l 为机脚长度。

所以有以下关系

$$(n^* \cdot l) = \sqrt{\frac{2m_F}{K_F^*}}\omega; \omega^2 = \frac{(n^* \cdot l)^2 \cdot K_F^*}{2m_F};$$

$$\frac{i\omega(2m_F)}{(n^* \cdot l)} = \frac{i(n^* \cdot l)K_F(1+i\eta_F)}{\omega}$$

具有复刚度 K^* 的橡胶隔振器的四端参数 β_{jk} 为

$$\begin{cases} \beta_{11} = 1 \\ \beta_{12} = 0 \\ \beta_{21} = \dfrac{i\omega}{K^*} = \dfrac{i\omega}{K(1+i\eta_I)} \\ \beta_{22} = 1 \end{cases} \tag{6-43}$$

式中：K 为橡胶隔振器的动刚度；η_I 为橡胶隔振器的阻尼损耗因子。

将以上关系代入式(6-41)，即可得到

$$T_A = \left| \left[\cos(n^* \cdot l) - \gamma_F(n^* \cdot l)\sin(n^* \cdot l)\right] - (n^* \cdot l)\left[\frac{K_F}{K} \cdot \frac{(1 + \mathrm{i}\eta_F)}{(1 + \mathrm{i}\eta_I)}\right] \cdot \left[\sin(n^* \cdot l) + \gamma_F(n^* \cdot l)\cos(n^* \cdot l)\right] \right|^{-1} \quad (6-44)$$

式中

$$\gamma_F = \frac{M}{2m_F} \quad (6-45)$$

$$\gamma = \frac{K_F}{K} \quad (6-46)$$

$$\gamma^* = \gamma \frac{(1 + \mathrm{i}\eta_F)}{(1 + \mathrm{i}\eta_I)} \quad (6-47)$$

$$(n^* \cdot l) = p + \mathrm{i}q \quad (6-48)$$

$$p = \frac{nl}{D_F} \cdot \left(\frac{D_F + 1}{2}\right)^{1/2} \quad (6-49)$$

$$q = -\frac{nl}{D_F} \cdot \left(\frac{D_F - 1}{2}\right)^{1/2} \quad (6-50)$$

$$D_F = (1 + \eta_F^2)^{1/2} \quad (6-51)$$

$$nl = N_R\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = N_K\Omega \quad (6-52)$$

式中：Ω 为频率比，由于机脚的刚度和隔振器的刚度相当于串联情况，所以弹性支承装置的固有频率应按下式计算

$$\omega_n^2 = \frac{2K \cdot K_F}{M(K + K_F)} = \frac{2K}{M}\left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}\right) \quad (6-53)$$

N_R 是当 $\eta_F = \eta_I = 0$ 时，使传递率 T_A 曲线获得第一个峰值（当 $\omega =$

ω_n 时)的(nl)值。它可以近似按下式计算

$$N_R = [(\gamma_F + 1)\gamma + \gamma_F]^{-1/2} \tag{6-54}$$

当 γ_F 及 γ 很大时

$$N_R \approx (\gamma_F \cdot \gamma)^{-1/2} \tag{6-55}$$

这样在各种不同的角频率 ω 下都可按式(6-52)定出(nl)值,然后就可求出 p、q 以及 T_A。

图 6-16 即为一机脚刚性不足时的传递率曲线。图中 $\gamma_F = \frac{M}{2m_F} = 40$,$\gamma = \frac{K_F}{K} = 5$、25 及 100,$\eta_I = 0.05$,$\eta_F = 0.01$。从图中可以

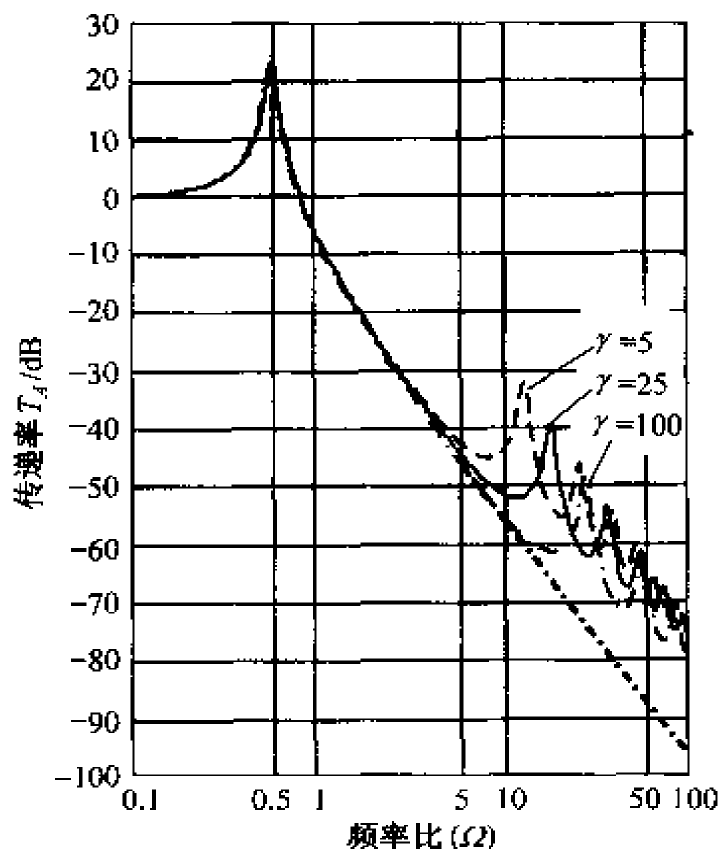


图 6-16　机脚刚性不足时的传递率曲线

看出,在一定的 γ_F 值下,随着刚度比 γ 的增大,传递率曲线上耸立的共振峰向着高频方向推移。当 γ_F 和 γ 相当大时($\gamma > 5$),则机脚第一个共振频率的真实数值可按下式近似计算

$$\omega_1 \approx \frac{\pi\overline{\omega}_n}{2}\sqrt{\gamma_F \cdot \gamma} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{K_F}{m_F}} \tag{6-56}$$

从图中可以看出，当机脚刚度 K_F 与隔振器刚度 K 之比增大时，高频波动效应相应地减小。一般希望 ω_1 越大越好，为此希望设计的机脚静刚度和质量之比越大越好。一个简单实用的办法是使机脚尽量地短。

6.3 隔振器中的波效应

5.2 节中单自由度隔振系统的传递率表达式，是在隔振器中弹簧质量可以忽略的假设上推导出来的。实际上，所有的隔振器——无论是由金属材料还是其它材料制成——都具有一定质量。因此，对于高频振动来说，当隔振器的尺寸等于隔振元件中弹性波半波长的整数倍时，有可能在隔振器中产生波效应。

6.3.1 理论分析

如果把一个具有弹性和阻尼的圆柱形隔振器看作一根杆（如图 6－17 所示），则它是具有黏滞常数的圆弹性杆，当其直径与波长相比较小时，弹性杆内纵波运动方程为[6]

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \mu'\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t\partial x^2} \tag{6-57}$$

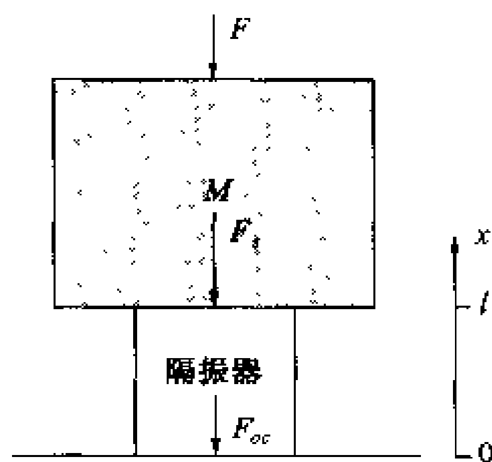


图 6－17　隔振器及其受力情况示意图

式中：u 为杆上各点的纵向位移；ρ, E, μ' 分别为材料的密度、弹性模量和黏滞系数。因为黏滞系数的存在，所以上式不同于

式(2－39)。

因为弹性杆的横截面是有限的,所以存在横向运动和横向应力,但这里都忽略了,所以上式并不很准确。如果杆的一端受简谐力 $F=F_0e^{i\omega t}$ 的激励,另一端被刚度无穷大的质量支承而不能产生变形,则式(6－57)变为

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = (E + i\omega\mu') \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{6-58}$$

上式与式(2－39)有相同的形式,其解为

$$u(x,t) = U(x)\eta(t) = (A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x})e^{i\omega t} \tag{6-59}$$

式中 $U(x)$、$\eta(t)$ 的定义与第二章一致;$\gamma=\alpha+i\beta$ 是复传播函数,如果 $\omega\mu'/E \ll 1$,有[7]

$$\alpha = \omega^2\mu'/(2\rho C_0^3) \tag{6-60}$$

$$\beta = \omega/C_0 \tag{6-61}$$

$$C_0 = (E/\rho)^{\frac{1}{2}} \tag{6-62}$$

因为基础的刚度无限大,所以边界条件为

$$\begin{cases} U(x) = 0 \quad (x=0) \\ P(x) = \dfrac{F_S}{S} \quad (x=l) \end{cases} \tag{6-63}$$

式中:P 为截面 $x=l$ 上的正应力;F_S 为作用在该截面的力;S 为截面积。由上式的第一式得

$$A_1 + A_2 = 0 \tag{6-64}$$

由式(6－63)的第二式得

$$(E + i\omega\mu')\frac{dU(x)}{dx}\bigg|_{x=l} = P = \frac{F_S}{S} \tag{6-65}$$

即

$$(E + i\omega\mu')(A_1\gamma e^{\gamma l} - A_2\gamma e^{-\gamma l}) = \frac{F_S}{S} \tag{6-66}$$

将式(6－64)代入上式得

$$A_1 = \frac{F_S}{2S\gamma(E + i\omega\mu')\cosh\gamma l} \tag{6-67}$$

故有

$$U(x) = \frac{F_S}{2S\gamma(E + i\omega\mu')\cosh\gamma l}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})$$

$$= \frac{F_S \sinh\gamma x}{S\gamma(E + i\omega\mu')\cosh\gamma l} \tag{6-68}$$

进一步可得

$$\frac{\dot{u}(x)}{\eta(t)} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{1}{\eta(t)} = i\omega \cdot \frac{F_S \sinh\gamma x}{S\gamma(E + i\omega\mu')\cosh\gamma l}$$

$$= \frac{F_S \sinh\gamma x}{S/l[\mu' - (iE/\omega)]\gamma l\cosh\gamma l} \tag{6-69}$$

$$p(x) = \frac{F_S \cosh\gamma x}{S\cosh\gamma l} \tag{6-70}$$

由此可知,单位长度导纳的倒数为

$$Z_0/\gamma = 1/y = [\mu' - (iE/\omega)] \tag{6-71}$$

通过上面的分析,我们得到了传播函数(即式(6－60)、式(6－61))与特征阻抗 Z_0(也等于 ρC_0)。

隔振器上的力如图 6－17 所示,这些力满足如下关系

$$F_S/F = Z/(Z + i\omega M) \tag{6-72}$$

$$F_{0c}/F_S = 1/\cosh\gamma l \tag{6-73}$$

式中:Z 为隔振器的输入阻抗

$$Z = SZ_0\coth\gamma l \tag{6-74}$$

F_{0c} 与 F 的比值定义为隔振器的传递率 T

$$T = \frac{F_{0c}}{F} = \frac{1}{(\mathrm{i}\omega M/SZ_0)\sinh\gamma l + \cosh\gamma l} \qquad (6-75)$$

当隔振器内的声波波长 λ 比隔振器的高度 l 大得多时，就可得隔振器的简单隔振理论。由式(6－71)得

$$Z_0 = \gamma/\gamma = \gamma[\mu' - (\mathrm{i}E/\omega)] \qquad (6-76)$$

式(6－75)可写为

$$T = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{i}\omega M}{S/l[\mu' - (\mathrm{i}E/\omega)]} \cdot \dfrac{\sinh\gamma l}{\gamma l} + \cosh\gamma l} \qquad (6-77)$$

现有 $\lambda \gg l, \gamma l \to 0$，以至 $\sinh\gamma l \to \gamma l$，$T$ 的表达式变为

$$T = \frac{R - (\mathrm{i}K/\omega)}{R + \mathrm{i}[\omega M - (K/\omega)]} \qquad (6-78)$$

式中

$$R = \mu' S/l \qquad (6-79)$$

$$K = ES/l$$

这两个量分别是振动理论中隔振器的阻尼和刚度。T 的幅值可改写为无量纲形式

$$|T| = \left[\frac{1 + \left(2\dfrac{R}{R_c}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left\{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left(2\dfrac{R}{R_c}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (6-80)$$

式中：$\omega_0 = (K/M)^{\frac{1}{2}}, R_c = 2(KM)^{\frac{1}{2}}$。

为方便计算，式(6－77)可改为其它形式。在讨论隔振器的效果时，我们只关心 T 的幅值。经过简单的代数运算，式(6－77)的幅值可写为

$$|T|^2 = (1 + 5n^2)/\{(1 + 5n^2)[\sinh^2\alpha l + \cos^2\beta l] +$$

$$(\omega M/\rho\cos)^2[\sinh^2\alpha l + \sin^2\beta l]$$

$$+ \omega M/\rho\cos[n\sin 2\alpha l - 2(1 + 2n^2)\sin 2\beta l]\}$$

$$(6-81)$$

式中：n 是无量纲阻尼参数，等于 $\omega\mu'/(2E)$。

为考察式(6-81)在阻尼等于0时的结果，令 $n=0$，得

$$|T| = \frac{1}{|\cos\beta l - (\omega M/\rho\cos)\sin\beta l|} \qquad (6-82)$$

很方便引入下列无量纲参数

$$n = \omega\mu'/(2E),\quad \beta l = \omega/\omega_0(m/M)^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha l = n\omega/\omega_0(m/M)^{\frac{1}{2}},\quad \omega M/\rho\cos = \omega/\omega_0(M/m)^{\frac{1}{2}}$$

式中：$m=\rho ls$ 是隔振器中弹性材料的质量。将这些量代入式(6-81)、式(6-82)，得

$$|T|^2 = \frac{1+5n^2}{[1+5n^2+(\omega/\omega_0(M/m)^{1/2})^2]\sinh^2(n\omega/\omega_0(m/M)^{1/2})}$$

$$+ n\omega/\omega_0(M/m)^{1/2}\sinh(2n\omega/\omega_0(m/M)^{1/2})$$

$$+ (1+5n^2)\cos^2(\omega/\omega_0(m/M)^{1/2})$$

$$(\omega/\omega_0(M/m)^{1/2})^2\sin^2(\omega/\omega_0(m/M)^{1/2})$$

$$-(\omega/\omega_0)(M/m)^{1/2}(1+2n^2)\sin(2\omega/\omega_0(m/M))$$

$$(6-83)$$

$$|T| = \frac{1}{|\cos(\omega/\omega_0(m/M)^{1/2}) - \omega/\omega_0(M/m)^{1/2}\sin(\omega/\omega_0(m/M)^{1/2})|}$$

$$(6-84)$$

这些形式的传递率将方便于讨论和计算。可以将式(6-84)中的

传递率表示成分贝形式 $20\log T$,其变化规律如图 6-18 和图 6-19 所示。当 ω 取下列值时,式(6-83)和式(6-84)中的分母最小值,

$$\omega_j = \omega_0 j\pi(M/m)^{1/2} \quad (j = 1,2,3,\cdots) \tag{6-85}$$

这些 ω_j 的值对应于驻波的共振角频率。当 ω 接近 ω_0 时,$\omega/\omega_0(m/M)^{1/2}$ 变得很小,相应地,式(6-83)和式(6-84)的分母取最小值。这就是振动理论中常说的共振。

经过代数运算,式(6-80)可写为

$$T = \sqrt{\frac{1 + 4n^2(\omega/\omega_0)^2}{[1-(\omega/\omega_0)^2]^2 + 4n^2(\omega/\omega_0)^2}} \tag{6-86}$$

值得注意的是,式中的 n 与振动理论中的无量纲参数——阻尼比 R/R_c 相同。在低频共振区,当阻尼不是很大时,传递率可近似表达为

$$T_0 = \frac{1}{2n_0} \tag{6-87}$$

n_0 与品质因数有以下关系

$$n_0 = \frac{1}{2Q_0} \tag{6-88}$$

式中 $Q_0 = \omega_0 M/R_0$ 是低频共振时的 Q。

令人称奇的是,在上文的推导过程中,质量比 M/m 成了重要参数。假设机器质量 M 和低阶共振角频率 ω_0 是确定的,因为 $\omega_0 = \sqrt{K/M}$,所以 K 也是确定的。但我们还可以自由选择 m。例如,如果隔振器是圆柱体,K 值大小取决于隔振器的横截面积、高度和杨氏模量

$$K = ES/l \tag{6-89}$$

保持 K、E 不变,还可以任意选择 S。通过选择 S 和 l 的大小,可以改变质量 m 的大小。式(6-89)可以改写为

$$m = \rho ES^2/K \tag{6-90}$$

式中：$\rho = m/(Sl)$。可见，选定了 K 之后，我们还可以自由选择 m，即选择隔振器的不同形状。

再来看图 6－18 和图 6－19 中传递率的理论曲线。从图 6－18 上可以看出，在 ω 接近出现驻波的频率之前，隔振系统的传递特性与集中参数系统的振动理论相吻合，随着频率的进一步升高，传递率不再以每倍频程 12dB 下降。驻波频率可由下式近似计算

$$\omega_j = \omega_0 j\pi\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (j = 1,2,3,\cdots)$$

式中 ω_j是驻波角频率。在频率 ω_j处的传递率可由下面的近似关系式计算

$$T_j = \frac{\omega_j}{\omega_0}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\sinh\left[n\frac{\omega_j}{\omega_0}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (6-91)$$

这是式(6－83)的近似表达式。值得注意的是，传递率曲线在高频段出现峰值，是因为驻波使传递率从简单振动理论中每倍频程降低 12dB 的曲线偏离，并高出约 20lg$n$。峰值之间的波谷以每倍频程 6dB 降低。但随着频率比进一步升高，峰值和谷值开始重叠，驻波就分辨不出来了。在这高频率比段，隔振器可以看作是耗能介质，弹性波以指数方式衰减。从图上可以清楚地看到，传递率的下降加快。

图 6－18 显示出高阻尼隔振器具有很大的优势，然而简单振

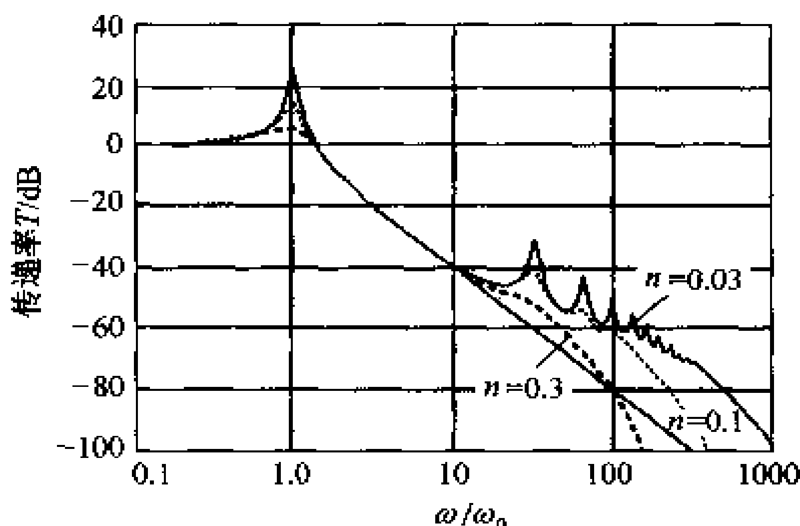


图 6－18　传递率 T 的理论曲线(质量比 $M/m = 100$)

动理论告诉我们,高阻尼增加传递率。图 6-19 示出了阻尼固定时不同质量比对传递率的影响。从图上可以看出,不存在一个所有频段均最佳的质量比,若某质量比在某一频段内具有最好的性能,即传递率最低,那么在另一频率范围内其性能却很差。

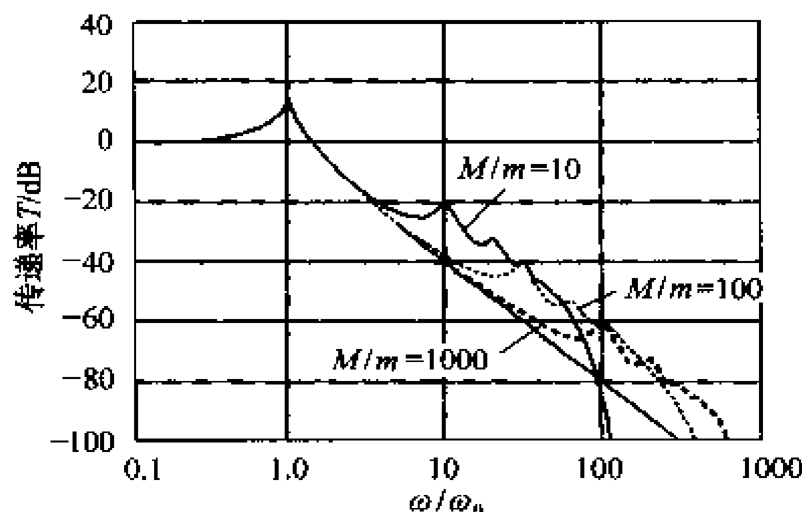


图 6-19　传递率 T 的理论曲线(阻尼参数 $n=0.1$)

6.3.2　实验结果

递过上一节的理论分析可知,对于高频振动,当隔振器的尺寸等于隔振元件中弹性波半波长的整数倍时,在隔振器中产生波效应,传递率曲线在高频段出现多个峰值。图 6-20[8] 给出了实验所得到的单自由度隔振系统的传递率图(实线),并与假设隔振器无质量时计算得出的传递率(虚线)相比较。该隔振系统的弹性元件由高阻尼($\delta>0.45$)的天然橡胶制成(40% 的炭黑)。图 6-21[8] 给出了不同隔振器的传递率实测曲线。虚线表示小阻尼受压缩隔振器的传递率曲线,点画线表示小阻尼受剪切隔振器的传递率曲线,实线表示阻尼更小、质量却更大的钢弹簧的传递率曲线。从这些传递率曲线可以看出,高频段存在许多峰值,这使得高频段的传递率变差。对受压的圆柱形橡胶隔振器而言,基频为 $f_n=30\text{Hz}$,在 $f'_n=500\text{Hz}$ 处($f'_n/f_n>16$),可以观察到一个高频峰值,其大小比基频峰值小约 47dB(约 200 倍)。对于受剪切应力作用的橡胶隔振器来说,$f_n=26\text{Hz}$,$f'_n=850\text{Hz}$,$f'_n/f_n=33$,共振峰之间相差

约 60dB(约 1000 倍)。然而,对钢弹簧而言,在如图所示的频率范围内存在许多高频共振。当 $f_n = 15\text{Hz}$ 时,第一个高频共振峰出现在 $f'_n = 83\text{Hz}$,$f'_n/f_n = 5.5$,该共振峰比基频共振峰低 16dB(约 7 倍)。

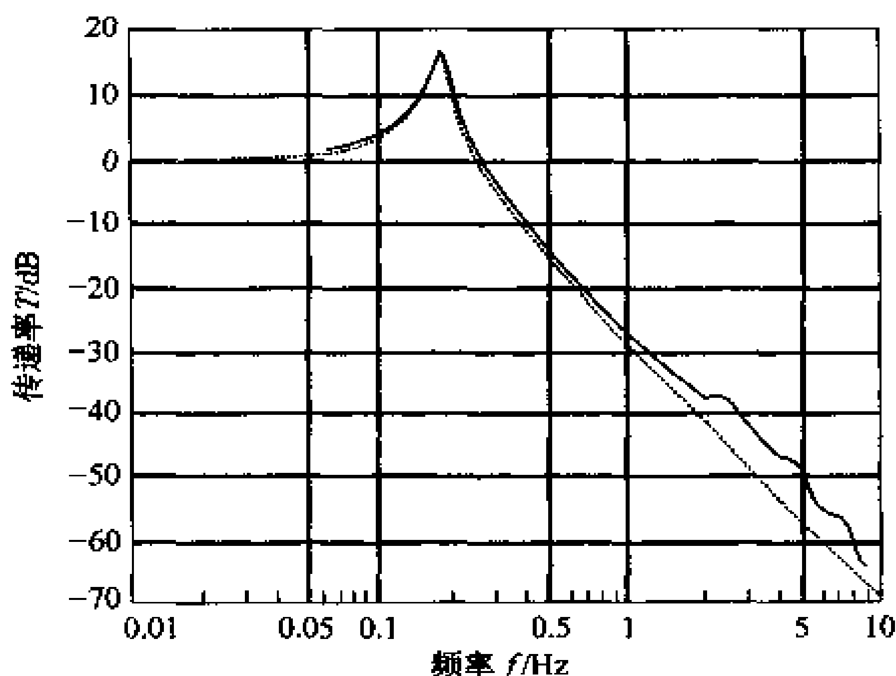


图 6-20　单轴向隔振系统在宽频范围内的传递率(实线)

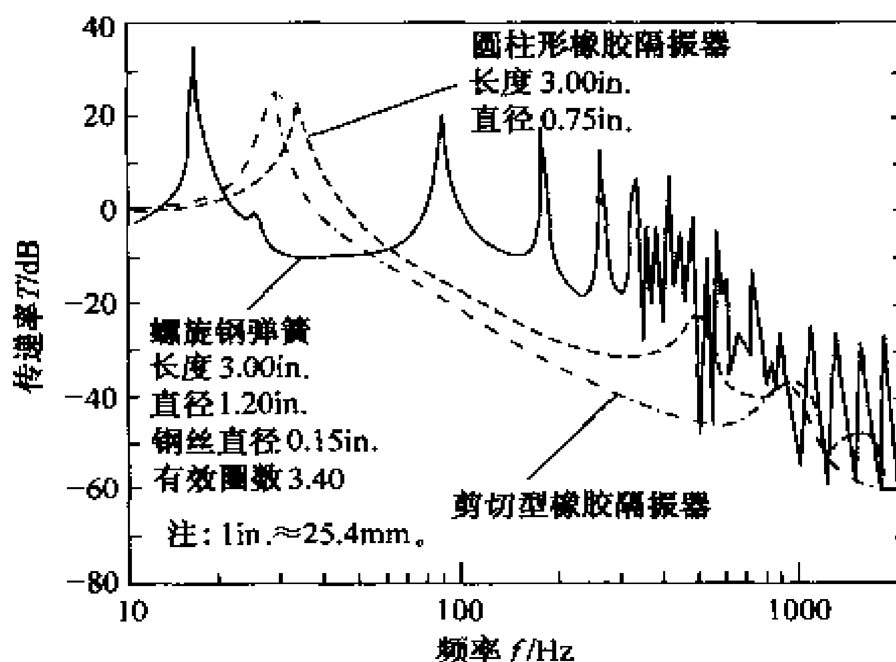


图 6-21　单轴向隔振系统在橡胶隔振器受压缩、剪切以及采用钢弹簧时的传递率

6.4 阻尼对隔振效果的影响

6.4.1 阻尼在隔振中的作用

现在已经出版了许多关于振动理论的书籍,并且它们有关隔振的部分内容是相同的。书中所考虑的系统是具有黏性阻尼的单自由度隔振系统,如图5-2(a)所示。该系统的性能由受到正弦激励或运动激励时的传递率来进行描述的,见式(5-6)(质量$m_f=\infty$)和式(5-8)。通过这种方法研究隔振系统可以得到一个基本结论:隔振系统只有在正弦激励的频率$f>\sqrt{2}f_n$时才有效,f_n是隔振系统的自然频率。在隔振系统中,阻尼可以减小共振峰的幅值,但事实上这并不重要,因为系统通常在大于共振频率的范围内工作。另一方面,增加阻尼会降低隔振频率范围内的隔振效果。不幸的是,这成为了绝大多数工程师的心理惯性[9],包括那些从事振动控制的工作人员。

研究表明,对实际物体(包括高精度/振动敏感设备、本身为振源的设备和所谓的通用机械,见第8章)进行隔振时,上面的结论是不正确的。因为在大多数环境中,增大阻尼有利于对大部分物体的隔振。

从以下几个方面可以证明这个结论。

一方面,文献中采用的模型(一个质量元件放置在一个无质量无阻尼的线性弹簧上,线性阻尼器和弹簧并联)是可以用解析方法研究的理想模型。然而,这种模型仅仅代表一小部分实际隔振系统(一些具有惯性块的系统被安装在带油阻尼器的刚弹簧上)。而绝大多数隔振器是由具有准线性或强烈非线性阻尼特性(迟滞特性)的橡胶、聚合体、金属丝网等弹性元件制成。这些材料的阻尼特性表明随着阻尼的增加,它只是对高频振动的传递率稍有影响。

另一方面,实际隔振系统中的动态激励具有复杂的频谱特征。

当激励力的频谱在较宽的范围内具有几个幅值相当的谐波时，要对所有的频谱成分都进行隔振（减小强度）通常是不实际的。最低频成分一般不是最令人讨厌的甚至它被稍微放大后也是可以接受的。因此，一些低频成分甚至可能和隔振系统的自然频率发生共振。在这种系统中，只有增加阻尼才能使振动强度在整体上降低，见 8.3.2 节。

对振动敏感设备而言，隔振是至关重要的。这些设备不希望隔振系统在它们的正常工作区内产生共振。此时，隔振系统不能够用单自由度系统来表示。因为振动敏感设备在工作区内的相对振动幅值有非常严格的限制，所以必须把支承结构（地面）到设备之间的振动传递过程与设备座身的绝对振动向工作区传递或转换的过程结合起来研究。后而这个过程是用低频时非常小的传递率（因此相对振动的幅值非常小）来表示的。如果在工作区内没有超出相对振动幅值的限制，隔振系统中的低频共振通常是允许的，甚至精度非常高的设备也是如此。那么如何来减小共振的幅值并能够更大限度地接受这些共振呢？显然，可以通过增加隔振器中的阻尼来实现。

虽然阻尼对冲击传递率的影响和稳态振动时不同，但是增加隔振器中的阻尼对于精密设备和本身是振源的设备而言，有利于隔离脉冲激励，见 5.6 节、8.1.3 节、8.2.3 节、8.2.4 节。

当被隔振物体安装在非刚性支承结构上时，增加隔振器的阻尼不仅改善了振动效果，而且增加了支承结构本身的阻尼。

隔振器的阻尼也会影响被隔振物体的动态特性，见 8.3.1 节。

必须注意的是，在本节前而所讨论的大多数情况中，隔振器阻尼变化产生的影响和刚度（或者隔振系统的自然频率）变化产生的影响是紧密联系的。在许多情况下，隔振器阻尼的减小可以通过减少其刚度来补偿（如对于精密设备的隔振），而在另一些情况下，隔振器阻尼的减小可以通过增加其刚度来补偿（如为了保持机床的动态稳定性，见 8.3.1 节）。在特定的应用中，这种关系通常可以应用包括了刚度（自然频率）和阻尼的隔振指标来表示。

这些隔振指标由下列式子表示：式(8－15)、式(8－39)、式(8－46)、式(8－50)和式(8－52)。

对机械结构的动态特性而言，这些指标是非常典型的[10,11]。虽然这些指标是基于许多假设而近似得到的，但在特定的应用中，它们非常有利于确定隔振器的特性和选择隔振器弹性元件的材料。

在许多情况中，隔振器的弹性元件不使用大阻尼材料，主要是担心大阻尼将导致弹性元件中出现较大的能量损耗并导致过热。虽然这个结论通过使弹性元件产生周期应变而得到了证实，但下面将证明这并不成立。

6.4.2 隔振器中阻尼产生的热

通常根据与自然频率/刚度和阻尼相关的指标来对不同被隔振物体和不同工作环境下隔振系统的参数进行选择。在许多应用中，如果采用较大阻尼的隔振器，可以大幅度提高隔振系统的性能。然而，人们有时并不采用大阻尼，而是优先选择阻尼较低的隔振器，其主要原因是认为大阻尼隔振器在隔振过程中会产生更多的热，这将导致橡胶弹性元件和其它由热敏感材料制成的弹性元件出现过热，从而加速其老化过程。下面将说明这个观点并不正确[12]。

弹性元件中的热量是由于它在周期变形的过程中耗散了机械能而产生的。让我们来考虑一个简单的振子，如图6－22所示，质量m被橡胶隔振器支承，其刚度为k，在周期变形中的能量耗散率为ψ，见5.2.1节。在一个振动周期中，弹性元件变形的最大势能是

$$U = k\frac{A^2}{2} \tag{6-92}$$

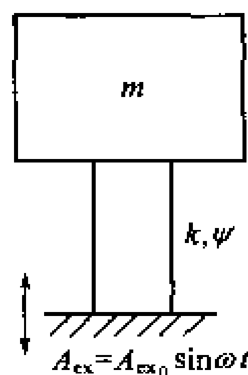


图6－22 具有阻尼弹性元件的振子

式中 A——变形量的幅值。

在一个变形周期中，耗散的总能量(转换成热量)为

$$\Delta U = \psi U = \psi k \frac{A^2}{2} \tag{6-93}$$

共振时，质量 m 的振幅为

$$A_{res} = A_{ex_0} \frac{2\pi}{\psi} \tag{6-94}$$

式中：A_{ex_0}为激励的幅值。因此，在共振时所耗散的能量(耗散的最大能量)为

$$\Delta U = \psi k \frac{A_{res}^2}{2} = 4\pi^2 k A_{ex_0}^2 \frac{1}{\psi} \tag{6-95}$$

由于激励力的幅值 A_{ex_0}一定，所以当阻尼 ψ 越大时，橡胶元件中所耗散的能量就越少。这种听起来很荒谬的结论能够很容易进行解释：机械系统中，阻尼的影响首先是改变系统的平衡性能，在这里，它表示共振振幅的减少。阻尼的第二个影响是耗散能量。如果弹性元件在强迫变形(如偏差补偿联轴器)的状态下工作，那么变形的幅值是一定的，因此产生的热量和弹性元件中阻尼的大小成反比。

6.5 隔振系统的动态耦合对隔振效果的影响

6.5.1 隔振器的弹性特征

隔振器是具有两个端面的弹性(柔性)元件，它连接着被隔振物体和支承平面。除非有特殊的限制，弹性元件可以在任何平移方向或转动方向阻碍两个端面之间的运动。在相对较低的频率范围内，振动的隔离通常非常重要，此时弹性元件的质量可以忽略。然而，在高频范围，振动的传递受到弹性元件内波共振的严重影响(见 6.3 节)，因此，在这种情况下，弹性元件的质量必须加以

考虑。

弹性元件可以阻碍两个端面之间的运动(力)。阻碍这种运动所需的阻力取决于两个端面之间相对位移的幅值和方向,这可以用刚度参数来刻画;同时还取决于它们之间相对速度的大小和方向,这可以用阻尼参数来刻画。当弹性元件为金属弹簧(通常是钢材料)时,它们的阻尼可以忽略不计,所以,此时通常需要采用特殊设计的阻尼器来增加阻尼。

一般说来,将力作用于弹性元件时会使其产生变形,但变形的方向与力作用的方向并不完全相同。在原点位置与弹性元件的弹性中心位置相同的任意坐标系中,线性弹性元件的弹性特性可以用36个刚度常数 k_{mn} 来表示,其中第1个下标表示力(力矩)作用的方向,第2个下标表示在力作用下产生的平移(转动)方向。3个"自"平移刚度参数 k_{xx}, k_{yy}, k_{zz} 描述了当力作用于某坐标轴时,弹性元件在该轴向上产生的变形。6个"互"平移刚度常数 k_{xy}, k_{xz}, k_{yx}, k_{yz}, k_{zx}, k_{zy} 描述了当力作用于某个轴时,在其它坐标轴上产生的位移。3个"自"角刚度常数 $k_{\alpha\alpha}$, $k_{\beta\beta}$, $k_{\gamma\gamma}$ 分别描述了弹性元件在 X, Y, Z 轴上由绕该轴的力矩产生的角位移。6个"互"刚度常数 $k_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\gamma}$, $k_{\beta\alpha}$, $k_{\beta\gamma}$, $k_{\gamma\alpha}$, $k_{\gamma\beta}$ 描述了当力矩绕某个轴时,在其它轴上产生的角位移。其余18个"互"刚度系数表示平动—转动位移之间的相互作用,如 $k_{x\alpha}$, $k_{\alpha x}$, $k_{y\gamma}$, $k_{\gamma y}$ 等。这些刚度常数具有互易性,即 $k_{mn}=k_{nm}$,或者

$$k_{xy}=k_{yx};k_{xz}=k_{zx};\cdots;k_{\alpha\beta}=k_{\beta\alpha};k_{\alpha\gamma}=k_{\gamma\alpha};\cdots \quad (6-96)$$

只有当力矢量和力矩的方向沿着(或者绕)弹性主轴时,变形的方向才会和力因子作用方向一致。任意一个对称轴都是弹性主轴。弹性主轴之间是相互垂直的,并且在弹性元件的弹性中心处相交,因此这就确定了弹性元件在隔振系统的数学模型中的位置,该位置可以被用来建立系统的运动方程。如果将坐标系的原点置于弹性中心,那么平移/转动"互"刚度系数将会消失。在弹性元件的主坐标系中,所有的互刚度系数都为零,即 $k_{mn}=0$。如果令弹性主

轴分别为 P、Q、R，则平移刚度分别为 k_p、k_q、k_r；绕 P、Q、R 轴的角刚度分别为 k_π、k_θ、k_ρ，并且弹性主轴 P、Q、R 和轴 X、Y、Z 之间所夹角度的余弦分别为 λ_{xp}，λ_{xq}，…当坐标系的原点和设备的弹性中心重合时，可以得到如下方程组

$$
\begin{cases}
k_{xx} = k_p\lambda_{xp}^2 + k_q\lambda_{xq}^2 + k_r\lambda_{xr}^2 \\
k_{yy} = k_p\lambda_{yp}^2 + k_q\lambda_{yq}^2 + k_r\lambda_{yr}^2 \\
k_{zz} = k_p\lambda_{zp}^2 + k_q\lambda_{zq}^2 + k_r\lambda_{zr}^2 \\
k_{xy} = k_p\lambda_{xp}\lambda_{yp} + k_q\lambda_{xq}\lambda_{yq} + k_r\lambda_{xr}\lambda_{yr} \\
k_{xz} = k_p\lambda_{xp}\lambda_{zp} + k_q\lambda_{xq}\lambda_{zq} + k_r\lambda_{xr}\lambda_{zr} \\
k_{yz} = k_p\lambda_{yp}\lambda_{zp} + k_q\lambda_{yq}\lambda_{zq} + k_r\lambda_{yr}\lambda_{zr} \\
k_{\alpha\alpha} = k_\pi\lambda_{xp}^2 + k_\theta\lambda_{xq}^2 + k_\rho\lambda_{xr}^2 \\
k_{\beta\beta} = k_\pi\lambda_{yp}^2 + k_\theta\lambda_{yq}^2 + k_\rho\lambda_{yr}^2 \\
k_{\gamma\gamma} = k_\pi\lambda_{zp}^2 + k_\theta\lambda_{zq}^2 + k_\rho\lambda_{zr}^2 \\
k_{\alpha\beta} = k_\pi\lambda_{xp}\lambda_{yp} + k_\theta\lambda_{xq}\lambda_{yq} + k_\rho\lambda_{xr}\lambda_{yr} \\
k_{\alpha\gamma} = k_\pi\lambda_{xp}\lambda_{zp} + k_\theta\lambda_{zq}\lambda_{zq} + k_\rho\lambda_{xr}\lambda_{zr} \\
k_{\beta\gamma} = k_\pi\lambda_{yp}\lambda_{zp} + k_\theta\lambda_{yq}\lambda_{zq} + k_\rho\lambda_{yr}\lambda_{zr}
\end{cases}
\tag{6-97}
$$

如果主轴和主刚度已知，可以用方程组(6－97)来计算隔振系统用不同坐标系描述时的刚度。或者用该方程组来求主刚度与主轴的位置，值得注意的是，只有 6 个余弦值 λ_{mn} 是独立的[13]。

虽然这种方法看似繁琐，但我们必须记住，上面所有方程都是建立在坐标系原点与弹性中心重合的假设基础上的。然而，对于给定的非对称弹性元件（或者小于 3 个对称轴/对称平面）而言，弹性中心的位置未知，因此分析过程变得更为复杂。

幸运的是，绝大多数实际隔振器的弹性元件至少有一个对称

轴，很多情况下具有两个或者更多的对称平面。同时，它们的尺寸通常比被隔振物体的尺寸或者两隔振器之间的距离小得多，因此，可以近似地假设弹性元件的弹性中心位于几何中心或质量中心。

隔振器和隔振系统的角刚度是一个非常重要的参数。当所有的隔振器位于同一平面（如水平面）时，绕某一个水平轴的角刚度由两个因素决定，一是隔振器的垂向刚度以及隔振器之间的距离，其次是隔振器的角刚度。第一个因素如图 6－23 所示，从图中可以看到梁由两个垂向刚度分别为 k_{z_1} 和 k_{z_2} 的隔振器支承，在力矩 M 的作用下，两隔振器产生的垂向变形量分别为 Δ_1 和 Δ_2。梁在力矩 M 的作用下，绕中心 O 旋转的角度为 α。O 位于梁上，其位置可以

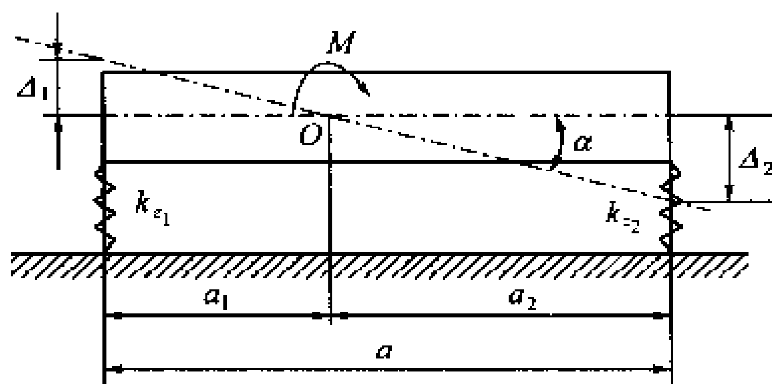


图 6－23　由平动弹簧支承的梁的角刚度

通过如下力平衡方程求得

$$k_{z_1}\Delta_1 - k_{z_2}\Delta_2 = 0, \quad 或 \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{k_{z_2}}{k_{z_1}} \qquad (6-98)$$

绕点 O 的力矩平衡方程为

$$(k_{z_1}\Delta_1)a_1 + (k_{z_2}\Delta_2)a_2 = M \qquad (6-99)$$

而且，因为 $\alpha = \Delta_1/a_1 = \Delta_2/a_2$，有

$$(k_{z_1}a_1^2 + k_{z_2}a_2^2)\alpha = M \qquad (6-100)$$

或者

$$k_\alpha = \frac{M}{\alpha} = k_{z_1} a_1^2 + k_{z_2} a_2^2 \tag{6-101}$$

如果两个隔振器的角刚度分别为 $k_{\alpha 1}$ 和 $k_{\alpha 2}$。那么，总的角刚度为

$$k_\alpha = (k_{\alpha 1} + k_{\alpha 2}) + (k_{z_1} a_1^2 + k_{z_2} a_2^2) \tag{6-102}$$

除非专门给隔振器设计较大的角刚度，否则，在一般情况下，式(6－102)的第一项与第二项相比通常可忽略不计。因此，隔振器的角刚度在隔振系统的运动方程中通常不作考虑。

通常，假设隔振器的阻尼与它们的刚度成正比[14]。虽然这样便于分析，但所得到的结果却不一定正确。首先，这种描述仅仅适合于具有黏性(线性)阻尼的隔振器。虽然大多数隔振器具有橡胶、金属丝网以及其它非线性阻尼特性的弹性元件，但金属弹簧隔振器的阻尼非常小，当它们安装了黏性阻尼器后，仅仅在一个主(轴)方向上起作用，因此，在这种情况下，不能再假设阻尼与刚度成正比了。橡胶隔振器等大量生产的隔振器不仅具有非线性阻尼特性(通常，阻尼取决于振幅，而振幅因隔振器的不同而不同，或因隔振器安装方向的不同而不同)，而且其阻尼在各个方向上的变化方式和刚度的变化方式也完全不同。例如，橡胶弹性元件受到压缩时的阻尼与其发生剪切变形时的阻尼不同。对空气弹簧而言，活塞运动方向上的阻尼很大(由于设计造成)，而与该方向垂直的方向上的阻尼可忽略不计。

6.5.2 隔振系统的弹性耦合与解耦

在一般情况下，被隔振物体可以由任意数量、任意布置的隔振器支承。图 6－24 中只画出了一只隔振器。因为图中所示的坐标系原点和设备的重心重合，隔振器组可由式(6－97)所列的 12 个刚度系数以及相应的阻尼系数来刻画。该系统由多个力因子进行激励，它们可以分解为沿 X、Y、Z 轴方向的 3 个力分量 F_x、F_y、F_z，

以及绕 X、Y、Z 轴的 3 个力矩分量 M_x、M_y、M_z。同时，系统由于基础的运动将对隔振器产生作用（平移运动分量为 x_f、y_f、z_f，角位移分量 α_f、β_f、γ_f）。为了方便起见，基础运动的所有分量都在被隔振物体的坐标系，即 X、Y、Z 坐标系中进行定义。实际上，在大多数重要情况下，优先采用的坐标系都是自然坐标系。正如 6.5.1 节所述，这些隔振器的角刚度可以忽略不计。如果不考虑隔振器的阻尼，被隔振物体重心的平动位移将会使得单个弹性座架在 X 方向产生的力为 $-k_{xx}(x_c-x_f)$，绕 Y 轴的力矩（β 方向）为 $-k_{xx}(x_c-x_f)a_z$，绕 Z 轴（γ 方向）的力矩为 $-k_{xx}(x_c-x_f)a_y$。互耦合的刚度系数为 k_{xy} 和 k_{xz}，它们将使得在 Y 和 Z 方向上产生的力分别为 $-k_{xy}(x_c-x_f)$ 和 $-k_{xz}(x_c-x_f)$，同时在 α 方向上产生的力矩为 $(-k_{xz}a_y+k_{xy}a_z)(x_c-x_f)$，在 β 方向上产生的力矩为 $k_{xz}a_x(x_c-x_f)$，在 γ 方向上产生的力矩为 $-k_{xy}a_x(x_c-x_f)$。将其它的平动（Y 和 Z 方向）坐标和角度坐标（α、β、γ）类似的表达式综合起来，考虑到所有弹性座架的响应，且不考虑阻尼的影响，运动方程的矩阵形式可以写为

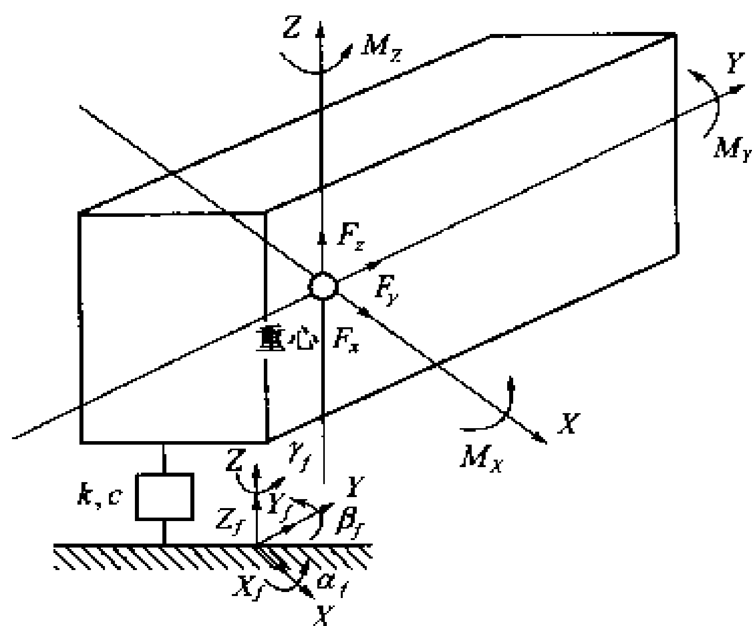


图 6-24　六自由度隔振系统

$$
[m]\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\\ \ddot{\alpha}\\ \ddot{\beta}\\ \ddot{\gamma}\end{bmatrix}+[k]\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=[k]\begin{bmatrix}x_f\\ y_f\\ z_f\\ \alpha_f\\ \beta_f\\ \gamma_f\end{bmatrix}+[F] \qquad (6-103)
$$

式中：$[m]$是惯性矩阵；$[F]$是力/力矩矩阵。然而，为了更好地理解隔振系统的解耦过程，将运动方程写成如下形式是相当有利的[15]

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x}_c+\sum k_{xx}x_c+\sum k_{xy}y_c+\sum k_{xz}z_c+\sum(k_{xz}a_y-k_{xy}a_z)\alpha+\\
&\quad \sum(k_{xx}a_z+k_{xz}a_x)\beta+\sum(k_{xy}a_x-k_{xx}a_y)\gamma\\
&\quad =F_x+\sum k_{xx}x_f+\sum k_{xy}y_f+\sum k_{xz}z_f+\sum(k_{xz}a_y-k_{xy}a_z)\alpha_f+\\
&\quad \sum(k_{xx}a_z+k_{xz})\beta_f+\sum(k_{xy}a_x-k_{xx}a_y)\gamma_f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& I_{xx}\ddot{\alpha}-I_{xy}\ddot{\beta}-I_{xz}\ddot{\gamma}+\sum(k_{xz}a_y-k_{xy}a_z)x_c+\sum(k_{yz}a_y-k_{yy}a_z)y_c+\\
&\quad \sum(k_{zz}a_y-k_{yz}a_z)z_c+\sum(k_{yy}a_z^2+k_{zz}a_y^2-2k_{yz}a_ya_z+k_{\alpha\alpha})\alpha+\\
&\quad \sum(k_{xz}a_ya_z+k_{yz}a_xa_z-k_{zz}a_xa_y-k_{xy}a_z^2+k_{\alpha\beta})\beta+\\
&\quad \sum(k_{xy}a_ya_z+k_{yz}a_xa_y-k_{yy}a_xa_z-k_{xz}a_y^2+k_{\alpha\gamma})\gamma=\\
&\quad M_x+\sum(k_{xz}a_y-k_{xy}a_z)x_f+\sum(k_{yz}a_y-k_{yy}a_z)y_f+\\
&\quad \sum(k_{zz}a_y-k_{yz}a_z)z_f+\sum(k_{yy}a_z^2+k_{zz}a_y^2-2k_{yz}a_ya_z+k_{\alpha\alpha})\alpha_f+\\
&\quad \sum(k_{xz}a_ya_z+k_{yz}a_xa_z-k_{zz}a_xa_y-k_{xy}a_z^2+k_{\alpha\beta})\beta_f+\\
&\quad \sum(k_{xy}a_ya_z+k_{yz}a_xa_y-k_{yy}a_xa_z-k_{xz}a_y^2+k_{\alpha\gamma})\gamma_f
\end{aligned}
$$

$$
m\ddot{y}_c+\sum k_{xy}x_c+\sum k_{yy}y_c+\sum k_{yz}z_c+\sum(k_{yz}a_y-k_{yy}a_z)\alpha+
$$

$$\sum (k_{xy}a_z - k_{yz}a_x)\beta + \sum (k_{yy}a_x - k_{xy}a_y)\gamma =$$

$$F_y + \sum k_{xy}x_f + \sum k_{yy}y_f + \sum k_{yz}z_f + \sum (k_{yz}a_y - k_{yy}a_z)\alpha_f +$$

$$\sum (k_{xy}a_z - k_{yz}a_x)\beta_f + \sum (k_{yy}a_x - k_{xy}a_y)\gamma_f$$

$$I_{yy}\ddot{\beta} - I_{xy}\ddot{\alpha} - I_{yz}\ddot{\gamma} + \sum (k_{xx}a_z - k_{xz}a_x)x_c +$$

$$\sum (k_{xy}a_z - k_{yz}a_x)y_c +$$

$$\sum (k_{xz}a_z - k_{zz}a_x)z_c + \sum (k_{xz}a_ya_z + k_{yz}a_xa_z - k_{zz}a_xa_y -$$

$$k_{xy}a_z^2 + k_{\alpha\beta})\alpha +$$

$$\sum (k_{xx}a_z^2 + k_{zz}a_x^2 - 2k_{xz}a_xa_z + k_{\beta\beta})\beta +$$

$$\sum (k_{xy}a_xa_z + k_{xz}a_xa_y - k_{xx}a_ya_z - k_{yz}a_x^2 + k_{\beta\gamma})\gamma =$$

$$M_y + \sum (k_{xx}a_z - k_{xz}a_x)x_f + \sum (k_{xy}a_z - k_{yz}a_x)y_f +$$

$$\sum (k_{xz}a_z - k_{zz}a_x)z_f + \sum (k_{xz}a_ya_z + k_{yz}a_xa_z - k_{zz}a_xa_y -$$

$$k_{xy}a_z^2 + k_{\alpha\beta})\alpha_f +$$

$$\sum (k_{xx}a_z^2 + k_{zz}a_x^2 - 2k_{xz}a_xa_z + k_{\beta\beta})\beta_f +$$

$$\sum (k_{xy}a_xa_z + k_{xz}a_xa_y - k_{xx}a_ya_z - k_{yz}a_x^2 + k_{\beta\gamma})\gamma_f$$

$$m\ddot{z}_c + \sum k_{xz}x_c + \sum k_{yz}y_c + \sum k_{zz}z_c + \sum (k_{zz}a_y - k_{yz}a_z)\alpha +$$

$$\sum (k_{xz}a_z - k_{zz}a_x)\beta + \sum (k_{yz}a_x - k_{xz}a_y)\gamma =$$

$$F_z + \sum k_{xz}x_f + \sum k_{yz}y_f + \sum k_{zz}z_f + \sum (k_{zz}a_y - k_{yz}a_z)\alpha_f +$$

$$\sum (k_{xz}a_z - k_{zz}a_x)\beta_f + \sum (k_{yz}a_x - k_{xz}a_y)\gamma_f$$

$$I_{zz}\ddot{\gamma} - I_{xz}\ddot{\alpha} - I_{yz}\ddot{\beta} + \sum (k_{xy}a_z - k_{xx}a_y)x_c +$$

$$\sum (k_{yy}a_x - k_{xy}a_y)y_c +$$

$$\sum (k_{yz}a_x - k_{xz}a_y)z_c + \sum (k_{xy}a_ya_z + k_{yz}a_xa_y - k_{yy}a_xa_z -$$

$$
\begin{aligned}
& k_{xz}a_y^2 + k_{\alpha\gamma})\alpha + \\
& \sum (k_{xy}a_x a_z - k_{xz}a_x a_y - k_{xx}a_y a_z - k_{yz}a_z^2 + k_{\beta\gamma})\beta + \\
& \sum (k_{xx}a_y^2 + k_{yy}a_x^2 - 2k_{xy}a_x a_y + k_{\gamma\gamma})\gamma = \\
M_z + & \sum (k_{xy}a_z - k_{xz}a_y)x_f + \sum (k_{yy}a_x - k_{xy}a_y)y_f + \\
& \sum (k_{yz}a_x - k_{xz}a_y)z_f + \\
& \sum (k_{xy}a_y a_z + k_{yz}a_x a_y - k_{yy}a_x a_z - k_{xz}a_y^2 + k_{\alpha\gamma})\alpha_f + \\
& \sum (k_{xy}a_x a_z - k_{xz}a_x a_y - k_{xx}a_y a_z - k_{yz}a_x^2 + k_{\beta\gamma})\beta_f + \\
& \sum (k_{xx}a_y^2 + k_{yy}a_x^2 - 2k_{xy}a_x a_y + k_{\gamma\gamma})\gamma_f \qquad (6-104)
\end{aligned}
$$

式(6－104)中的6个运动方程全面地描述了这个六自由度系统。显然，该系统具有6个自然频率。从式(6－104)可以看出，所有的坐标是动态耦合的。这意味着外力或者力矩在X、Y、Z坐标轴上的任何分量，以及基础平动和转动的任意分量在一般情况下都会使被隔振物体在所有坐标方向上产生位移。同时，被隔振物体的平动和转动在任意坐标上的分量都将产生力(力矩)并使基础在所有坐标方向上产生位移。这种全局耦合在许多重要场合都是应该避免的，同时，在系统的综合计算和优化过程中也不希望发生上述现象。在某些情况下，仅当弹性元件(隔振器)在某些轴向具有很大的阻尼时，可能希望坐标之间出现耦合，从面增加其它坐标轴方向上的阻尼。

坐标之间的耦合所带来的危害是：在某些隔振情况下，要求系统最大的自然频率小于激励力的频率范围，而不考虑它们的方向。当隔振系统中的6个自然振动模态产生了强烈的耦合时，则需要将所有的自然频率减小，因此要求隔离器的刚度非常小，这将导致系统产生剧烈的摆动。有时称这种状态为系统失稳，但从严格意义上讲这是不准确的。无论是对振动敏感设备还是对产生振动的设备面言，情况都是如此。这种全局耦合系统的计算分析非常复杂和棘手，部分原因是必须对所有激励的频谱特性进行识别，并将

它们输入到系统模型之中。

提高隔振系统性能最有效的方法之一是消除或至少减小系统中坐标之间的动态耦合。这将简化对系统自然频率的计算并使得不同设计参数对自然频率和模态的影响变得更清晰,并且有可能在不需要大幅度减小隔离器刚度的前提下使系统的自然频率靠得很近(增加较低的自然频率,减少较高的自然频率)。如果在某些特定的振动模态之间不产生耦合,那么可以提高系统的性能。例如,当在垂直方向上存在高强度的激励并且被隔振物体在水平方向对振动很敏感时,垂直方向和水平方向之间就必须消除相互耦合。

减小或消除坐标耦合的方法可以通过分析式(6-104)来得到。这些方程虽然是在自然坐标系中列出的,但适用于任意状态下的隔振器。除了5.4.3节中所讨论的倾斜安装这种特例以外,隔振器通常具有对称平面,此时它们的主轴平行于自然坐标轴。同时,除了某些特殊情况,隔振器的角刚度仍然可以忽略不计,因此有

$$k_{xx} = k_p = k_x; k_{yy} = k_q = k_y; k_{zz} = k_r = k_z;$$
$$k_{xy} = k_{xz} = k_{yz} = 0; k_\alpha = k_\beta = k_\gamma = k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\gamma} = k_{\beta\gamma} = 0 \tag{6-105}$$

基于上述假设,忽略每个惯性积,将式(6-104)变形为

$$m\ddot{x}_c + \sum_j k_{x_j}(x_c - x_f) + \sum_j k_{x_j}a_{z_j}(\beta - \beta_f) -$$
$$\sum_j k_{x_j}a_{y_j}(\gamma - \gamma_f) = F_x$$

$$I_x\ddot{\alpha} - \sum_j k_{y_j}a_{z_j}(y_c - y_f) + \sum_j k_{z_j}a_{y_j}(z_c - z_f) +$$
$$\sum_j (k_{y_j}a_{z_j}^2 + k_{z_j}a_{y_j}^2)(\alpha - \alpha_f) -$$
$$\sum_j k_{z_j}a_{y_j}a_{x_j}(\beta - \beta_f) - \sum_j k_{y_j}a_{x_j}a_{z_j}(\gamma - \gamma_f) = M_x$$

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{y}_c + \sum_j k_{y_j}(y_c - y_f) - \sum_j k_{y_j} a_{z_j}(\alpha - \alpha_f) + \\
& \qquad \sum_j k_{y_j} a_{x_j}(\gamma - \gamma_f) = F_y \\
& I_y \ddot{\beta} + \sum_j k_{x_j} a_{z_j}(x_c - x_f) - \sum_j k_{z_j} a_{x_j}(z_c - z_f) - \\
& \qquad \sum_j k_{z_j} a_{x_j} a_{y_j}(\alpha - \alpha_f) + \\
& \qquad \sum_j (k_{x_j} a_{z_j}^2 + k_{z_j} a_{x_j}^2)(\beta - \beta_f) - \sum_j k_{x_j} a_{y_j} a_{z_j}(\gamma - \gamma_f) = M_y \\
& m\ddot{z}_c + \sum_j k_{z_j}(z_c - z_f) + \sum_j k_{z_j} a_{y_j}(\alpha - \alpha_f) - \\
& \qquad \sum_j k_{z_j} a_{y_j} a_{z_j}(\beta - \beta_f) = F_z \\
& I_z \ddot{\gamma} - \sum_j k_{x_j} a_{y_j}(x_c - x_f) + \sum_j k_{y_j} a_{x_j}(y_c - y_f) - \\
& \qquad \sum_j k_{y_j} a_{x_j} a_{z_j}(\alpha - \alpha_f) - \\
& \qquad \sum_j k_{x_j} a_{y_j} a_{z_j}(\beta - \beta_f) + \sum_j (k_{x_j} a_{y_j}^2 + k_{y_j} a_{x_j}^2)(\gamma - \gamma_f) = M_z
\end{aligned}
\qquad (6-106)
$$

式(6－106)仍然表示所有的6个坐标存在着相互耦合。

固定机器的隔振安装允许作如下假设(许多移动机械同样可以如此),即所有隔振器都布置于水平面内,或者

$$a_{z_j} = 常数 \qquad (6-107)$$

此外,如果满足下列条件

$$\sum_j k_{z_j} a_{x_j} = 0, \quad \sum_j k_{z_j} a_{y_j} = 0 \qquad (6-108)$$

那么,系统的垂直方向(z)与其它坐标(水平或旋转方向)之间将不会发生耦合。

通过选择每个隔振器的刚度系数，可以用多种方法来满足式(6-108)。最自然的方法是使重 W 的物体的质量分布在安装点之间，并使用刚度与重量 W_j（指作用在第 j 个安装点的重量）成正比的隔振器。实际上，因为距离 a_x、a_y 都是从重心处测量得到，所以如果式(6-108)中的每个 k_{z_j} 都由 W_j 来代替，那么，该式便成了一个恒等式。

因此，如果第 j 个隔振器或座架的垂向刚度 k_{z_j} 和垂向反作用力 $R_j = W_j$（W_j 是指物体在座架处的载荷）成正比，则有

$$k_{z_j} = AR_j, A = 常数 \qquad (6-109)$$

那么可以满足式(6-108)，因为它表明被隔振物体在两个垂直面 $X—Z$、$Y—Z$ 内力矩平衡。

如果下式的条件能得到满足

$$\sum_j k_{x_j} a_{y_j} = 0, \quad \sum_j k_{y_j} a_{x_j} = 0 \qquad (6-110)$$

那么，沿着 Z 轴和绕 Z 轴的（坐标为 z 和 γ）振动不会产生耦合。如果对于所有隔振器来说，k_x/k_z、k_y/k_z 都为常数，那么除了满足式(6-108)以外，还可以满足上述所有条件。另外，如果满足如下条件

$$\sum_j k_{z_j} a_{x_j} a_{y_j} = 0 \qquad (6-111)$$

式(6-106)可以分解成对应于坐标 z 和 γ 的两个独立方程和对应于 $x-\beta$ 和 $y-\alpha$ 的两对耦合方程。当被隔振物体至少存在一个对称平面时，式(6-111)总是满足的。如果隔振器所在平面包含有重心，或者

$$a_{z_j} = 0 \qquad (6-112)$$

还可以进一步解耦。当式(6-110)~式(6-112)都满足时，沿所有坐标方向的振动都是独立的（解耦）。当被隔振物体不直接和地面隔离面是和大质量惯性块相连接时，允许调节重心在垂直方

向上的位置，因此式(6－112)的实现相对比较容易，可以将惯性块放置在隔振器上形成新的重心位置。在某些情况下，隔振器可以用特定的支架支承在重心位置，即使没有采用惯性块。取得这种效果的另外一种方法是在 $x-z$ 和 $y-z$ 平面上采用倾斜布置的隔振器(见 5.4.3 节)。如果在 α 或者 β 方向的角刚度值(在式(6－106)中被忽略)非常大(如在这些方向上使用了导槽或者使用了角刚度很大的隔振器)，那么 x 和 y 坐标之间便能实现解耦。这样就能非常简单地阻止扭转振动的产生。

根据式(6－110)～式(6－112)，可以独立地选择所有的自然频率。有时为了减少 6 个自然频率(或者是更小的数目)所在的范围而使所有自然频率几乎相等，这被认为是非常理想的。但是，应该意识到，自然频率之间靠得太近将会增加动态耦合发生的概率。自然频率都相等时，隔振系统的自然频率(或模态)在本质上可以用来表示隔振系统中全部的子系统。在 5.4.1 节中列举的三质量线性系统表明，当子系统之间的自然频率相互接近时，子系统之间动态耦合的概率 σ 会迅速增加。隔振器的非线性因素也会引发动态耦合，这在某种程度上是难以避免的。在采用线性系统不会产生耦合的情况下，如果采用非线性系统却能使各个模态之间出现耦合，即便是非线性很弱，情况也不容乐观，特别是当各个自然频率非常接近时，更容易发生模态耦合，如果自然频率相等，那么系统的耦合便是必然的了。

虽然初看起来式(6－109)是一种简化的直接方法，但情况并非如此。让我们来仔细研究两种经常使用的隔振器所需要满足的条件：① 刚度不变隔振器；② 自然频率不变(CNF)隔振器，在额定的载荷范围内，该隔振器的轴向(垂向)刚度和轴向(重量)载荷成正比。

(1) 如果采用了刚度不变的隔振器，那么所有隔振器总的垂向刚度(z 方向) $\sum k_{z_i}$ 由 z 方向上所期望的自然频率来确定

$$f_z \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sum k_{z_i}}{M}} \qquad (6-113)$$

式中"≈"符号反映了在强耦合系统中,模态之间的相互作用。对单个隔振器的选择来说,应该知道各个安装点之间的重量分布,这样可以使所选用的隔振器刚度系数与安装位置处的载荷成正比。

确定重量分布的第一步是在水平面内确定重心的位置。除了少数具有两个垂直对称平面或者一个对称垂直轴的情况外,重心位置可以通过试验来确定,也可以通过详细的图纸进行计算。

采用试验方法来确定仪器或者其它小型或轻型对象的重心是可行的[16],但对重型机械来说,用户便不能使用其中任何一种方法来确定其重心,并且制造商仅仅在特殊情况下才给出有关产品重心的信息,如大规模生产的汽车发动机等。通常情况下,重心的位置由用户通过"专业判断"来确定,至少有 ±(10~15)% 的误差。在许多情况下,特别是对具有重型运动部件(如工作平台、台架等)或者对工件质量变化范围很大的专用机床而言,重心的位置能够发生很大的变化,并且还需要考虑前面所提到的结构误差。例如,对于六角车床而言,两个安置位置之间的质量分布情况取决于回转刀架的位置[15]。

当重心位置确定后,静定状态下的所谓"运动学安装",也就是被隔振物体安装在 3 个支承体(隔振器)时的质量分布(安装点处反作用力)情况可以由计算唯一确定。实际上,大多数的工业设备以及仪器的支承点都大于 3。为了计算出在超静定状态下确切的重量分布情况,必须已知或者假设一些附加条件。

一个假设是物体和机座(或基础)的安装表面具有绝对刚性(或者至少要比隔振器硬)并且平坦,基础是水平的。因此,所有的反作用力相等

$$\underset{j=1,\cdots,n}{R_j} = \frac{W}{n} \qquad (6-114)$$

式中:n 是安装位置(或隔振器)的个数;W 是对象的总重。虽然当各个安装位置到重心的距离相差不大时,上述假设成立,但如果安装表面不平坦(平面度偏差)且和隔振器平均变形量相比不能被

忽略时，载荷条件将变化很大，这将导致座架发生不均匀变形，从而改变载荷的分布。如果某一个区域或某一座架的表面刚度降低，也会产生与上述情况类似的后果。

如果各个安装位置和重心的距离相差很大，那么式(6－114)不成立。例如，图6－25中有4个安装点，假设$R_1=R_2$、$R_3=R_4$，如果b_1和b_2相差很大，则有

$$R_1 = R_2 = W\frac{b_2}{2(b_1+b_2)};\quad R_3 = R_4 = W\frac{b_1}{2(b_1+b_2)} \tag{6-115}$$

如果安装表而平整度不够，或者安装表而的某些区域的刚度减小，那么这种质量分布也会发生变化[10]。质量分布不确定的另一个原因是由于机器设备中重型部件的运动，或者机床以及坐标测量仪上工件质量发生较大变化所造成的。据保守估计，由于上述原因而使得安装点之间质量载荷的分布变化至少达±35%。

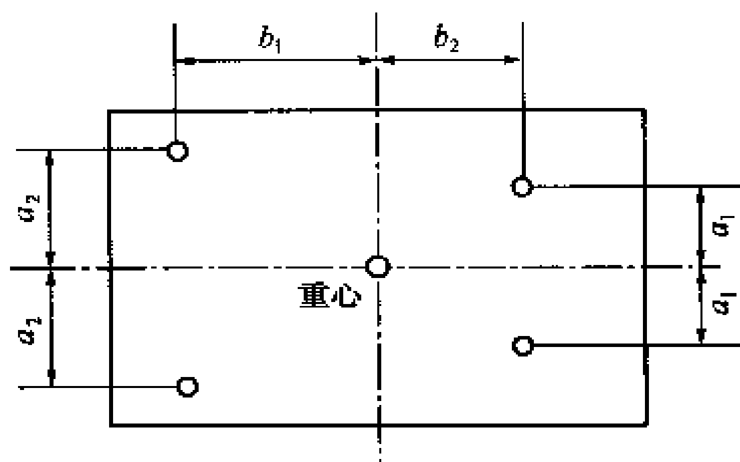


图6－25　座架的典型布置图

在确定重量载荷的分布情况以后，需要选择满足式(6－109)和式(6－113)的合适隔振器。市场上同一系列中相邻规格的隔振器的静刚度系数比约为1.5～2.0，舰船上使用的隔振器的该比值约为1.2～2.0[17]，因此可以假设平均比值为1.6。然而，通常情况下，由于同一系列中相邻规格的隔振器分别采用了不同硬度的橡胶材料，

使得它们的动、静刚度之比 K_{dyn} 相差很大，在 1.5 ~ 4.0 在之间。因此，可以保守地假设该比值为 ±1.5。

如果采用橡胶隔振器，通常情况下，橡胶硬度误差的容许范围是 ±5 个硬度单位，这等价于它们刚度变化 ±17%。

考虑到所有的不确定因素，并根据所计算或假设的质量载荷分布情况，选择的隔振器的刚度散布至少为名义刚度的 ±1.15 × 1.35 × 1.6 × 1.5 × 1.17 = ±4.3 倍。这意味着如果使用刚度不变的隔振器，即使是作了某些近似，也不能满足式(6 - 108)的条件。

(2) 定自然频率(CNF)隔振器具有特殊的非线性载荷一变形特性，此时，刚度和作用在隔振器上的载荷成正比。在实际应用中，CNF 隔振器在各个方向上的刚度值和它在主轴方向上的载荷(重量载荷)成正比，如式(6 - 109)所示。对市面上能买到的 CNF 隔振器而言，这个比值不超过 ±(10 ~ 15)%。橡胶硬度的误差不会明显地影响 CNF 隔振器的特性。因此，使用 CNF 隔振器能满足式(6 - 108)的解耦要求，且刚度散布的范围不会超过 ±(1.1 ~ 1.15)倍，因面足以实现解耦。

当隔振器——无论是定刚度隔振器还是定自然频率隔振器——的弹性材料具有动刚度依赖于振幅的特性时(如金属网丝、钢丝绳以及一些橡胶混合物)，由于不同的安装位置会产生不同的振幅，因此或多或少存在着坐标之间的耦合。

6.6 隔振系统中的非线性

隔振系统的非线性和其它动力学系统的非线性一样，在大振幅情况下是非常显著的。然而，对固定设备(生产和测量设备、内燃机等)以及对车辆、航天设备整体进行隔振，其稳定的振幅通常比它们的静态变形小得多。相应地，在小振幅情况下，考虑非线性效应后得到的结果与用线性近似化方法得出的动力学分析结果相差不大。但是，在某些情况下，必须将非线性因素的影响考虑其中：例如，当隔振系统承受高强度瞬时脉冲激励时，需要用到缓冲

器，这将引入强非线性过程；在应用小阻尼非线性隔振器时，会产生如次谐波共振、混沌等非线性效应；由于非线性因素的影响，隔振系统中有可能出现附加的坐标耦合。

上面所说的"非线性"主要是指隔振器载荷—变形特性中的非线性特性（静态非线性）。面其它类型的非线性是指隔振器的有效刚度和阻尼相对于振动频率和振幅的非线性特性。对振幅的依赖性是橡胶材料的一种特性，若在隔振器中使用了库仑摩擦连接机构，也会呈现出对振幅的依赖性。刚度和阻尼对频率和振幅的依赖性是隔振器设计中常用的橡胶和塑料的典型特征。各种类型的"动态非线性"特征（对振幅和频率的依赖性）在任何幅值范围都是非常显著的。

文献[18]给出了一种带缓冲器的隔振系统的综合设计方法。根据这种方法设计出来的隔振器除了能减小确定性的振动力以外，还能够承受剧烈的瞬时冲击。文献[18]中的实例为一个能产生约 60Hz 简谐激励力的空压机的隔振。此时必须将激励力衰减 15 倍才能保护相邻的精密设备，因此，需要采用一个自然频率相对较低的小阻尼悬挂装置。此外，该系统还必须能够承受外界环境施加的剧烈冲击（幅值为 $50g$、持续时间为 18ms 的锯齿状脉冲）以及在频率范围（0 ~ 2000）Hz 内，加速度为 16.6g（RMS）的白噪声（所要求的测试参数见文献[19]）。为了使传统的线性隔振器能满足上述要求，必须使弹性元件（弹簧）产生非常大的变形，这是不能接受的。而推荐的方法是只允许隔振器仅产生足以保护精密仪器的动态变形。为了满足这种严格的测试条件，被隔振物体（压缩机）需要与刚度相对较大的高阻尼缓冲器相连接。因此，在高强度冲击激励时，系统刚度变得更大，并成为了一个具有强非线性特性的振动—冲击系统。文献[18]的研究表明，通过使下列指标最小化可以使该系统具有最优的动态性能（最低的超载）。

$$\prod = \dot{X}\ddot{X} = V^2\Psi(\varsigma) \qquad (6-116)$$

式中：$\dot{X}$、$\ddot{X}$ 分别表示以速度 V 冲击缓冲器后（包括被缓冲器反弹

回来的过程）对象的最大速度和最大加速度；$\Psi(\varsigma)$为缓冲器阻尼的函数，当缓冲器的阻尼比为 $\varsigma=0.4$（损耗因子为 $\tan\beta=0.4$、对数衰减率为 $\delta\cong1.29$）时，该函数取得最小值。

使用最广泛的具有非线性特性的隔振器是自然频率不变（CNF）隔振器，见6.5节。CNF隔振器具有的载荷—变形非线性特性从许多方面看都能起到积极作用。这种隔振器除了对隔振系统中不同振动模态进行解耦外，还对制造过程中的缺陷不太敏感，因面其特性能被更精确地确定。由于这种隔振器的刚度可以随载荷的变化在一个非常宽的范围内进行变动，所以它们能够进行“自缓冲”，其性能和前面所描述的缓冲器相当或者更好一些。非线性隔振器另一个有趣的特点是当它的振幅很大时，隔振系统的幅频特性曲线会发生弯曲，如图4－11所示。这种效应使得不增加系统阻尼，也会使得共振振幅值得到一定程度的抑制。

非线性隔振系统的研究和应用受限于非线性动力学的研究进展，因此总的来说还处于探索阶段[20-27]。

此外，在高强度激励下，非线性隔振系统中会出现次谐波振动、超谐波振动和混沌（见第4章），只要应用适当，也可以起到好的隔振效果。针对线谱是舰艇水声隐身性能的主要危害并难以消除这一情况，楼京使等利用非线性隔振系统出现混沌时功率谱呈现连续谱并下降这一特性，提出了可应用于舰艇结构噪声线谱控制的混沌隔振方法[28]。

舰艇辐射水噪声一般分为两类：一类是纯频噪声，其频谱为线谱；另一类是宽带噪声，其频谱为连续谱。舰艇辐射噪声谱通常是连续谱和线谱的组合，如图6－26所示。构成舰艇辐射噪声的5个主要噪声源为：① 机械噪声；② 螺旋桨/推进噪声；③ 艇壳的全局共振引起的噪声；④ 流噪声；⑤ 空泡噪声。前3个噪声源产生的噪声本质上为纯频噪声，在辐射谱中表现为线谱，后2个本质上为宽带噪声。机械噪声频率范围一般为10Hz～1kHz，艇体共振频率一般为（10～60）Hz，但在特殊情况下可达2kHz，螺旋浆噪声一般低于100Hz，而空泡噪声和流噪声一般在10kHz以上。因此机

械噪声的频率覆盖了低、中、高频带，且位于一般声呐比较敏感的频率范围内。舰艇辐射噪声的谱特征随着舰艇航速的变化而变化。在高速航行时，宽带噪声在辐射噪声信号中占主要成分，而低速时，特别是在舰艇隐蔽航行状态下，机械噪声是主要噪声源，纯频噪声占主要成分，此时机械噪声是主要噪声源。

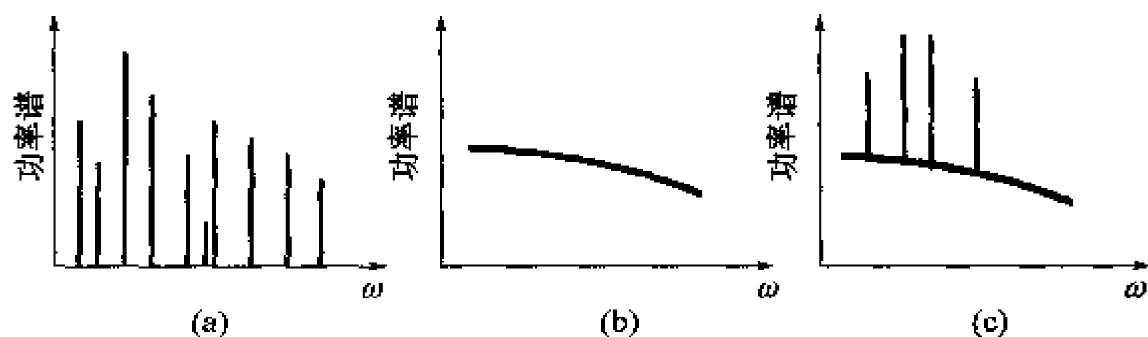


图 6-26　舰艇辐射噪声谱是连续谱和线谱的组合

(a) 线谱；(b) 连续谱；(c) 实际舰艇噪声谱。

舰艇机械设备的功率和惯性都相当大，工作条件比较稳定，所以由其产生的线谱有很高的强度和稳定度。现场测量表明，舰艇线谱强度与附近连续谱 1Hz 内含有的功率相比，有的可超出 (10～25)dB，稳定时间达到 10min 以上[29]。线谱集中而稳定的能量增加了舰艇的可探测性，而且线谱本身携带的频率信息，也是反潜设备进行目标参数估计和类型识别的重要依据。例如，精密地测定线谱的多普勒频移并实行跟踪，可以估计目标舰艇的运动参数。线谱一般集中在低频段，而低频噪声在水中传播得更远。此外，辐射噪声中的线谱分布对每一艘舰艇来说是一定的。因此线谱成了现代被动声呐在水声对抗中检测、跟踪和识别目标的主要特征信号，是舰艇水声隐身性能的主要危害。

隔振是控制舰艇动力机械振动向船体传递的最常用手段，目前的隔振系统都是按线性理论设计的，假定隔振器的刚度是线性的。线性隔振系统对较宽频率内的振动有隔离效果，但对线谱的隔离能力有限，因为系统对各频率成分的隔离效果是按一定比例来分配的，而不能突出对某一线谱的隔离。此外，线性系统具有频

率保持性，即不能改变舰艇辐射水噪声的频谱结构。

由于线性隔振系统的不尽人意之处，人们开始考虑非线性隔振装置，但始终限于周期运动的研究领域。例如，B. Ravindra 等用谐波平衡法求解了具有线性阻尼、库仑阻尼、非线性硬特性立方弹性恢复力的非线性隔振模型[21]和同时考虑弹性非线性和阻尼非线性的隔振模型[22]，对这些系统在谐波激励作用下的响应、稳定性、传递率进行了研究。以往尽管对利用混沌振动研制混沌激振机械作了许多工作[30,31]，却忽略了激振与隔振是振动的两极，在开发利用混沌激振的可行性被证实时，很少对工程中经常遇到的隔振问题利用混沌性态开展更有效的工作。虽然文献[32～34]也谈及了非线性振动系统中的混沌，但与其说是研究隔振问题，还不如说是研究混沌现象。实际上混沌振动所具有的一些特性，可应用于舰艇动力机械的振动控制。一方面混沌隔振系统能够改变系统输出的频谱结构，从而改变舰艇辐射水声的频谱结构；另一方面它还能使单频输入产生宽频输出，即把集中于某一频率的能量分散到较宽的频带上，从而最大限度地消除舰艇辐射水声中的线谱成分。

自从 Ueda 首次发现非线性振动系统中的混沌现象以来，倍周期分岔被公认为是通向混沌的主要途径之一。在通向混沌的倍周期分岔道路中功率谱具有标度性[35]，记倍周期分岔前的功率谱为 $P(n)$，倍周期分岔后的功率谱为 $P(n+1)$，则 $10\lg\left(\frac{P(n)}{P(n+1)}\right)=13.21\text{dB}$。功率谱的这一性质如图 6－27 所示，图中的虚线是等距离的。该图表示每经过一次倍周期分岔，系统响应中出现的新线谱与前一次分岔中的线谱成分构成功率谱强度相对低 13.21 dB 的线谱序列，所以当 n 很大时，即系统出现混沌运动时（其中有无限个周期运动），峰值功率谱强度下降很多。在到达混沌时，功率谱变成了连续的宽谱（如图 6－28 所示），这样不仅特征线谱成分有了较大的削弱，而且也有效地抑制了系统的振动。从能量的观点来看，原来集中在激励频率处的能量分布到较宽的频带上。这

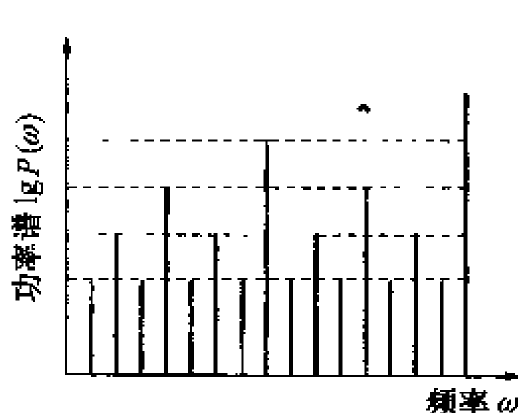


图 6－27　功率谱的标度性

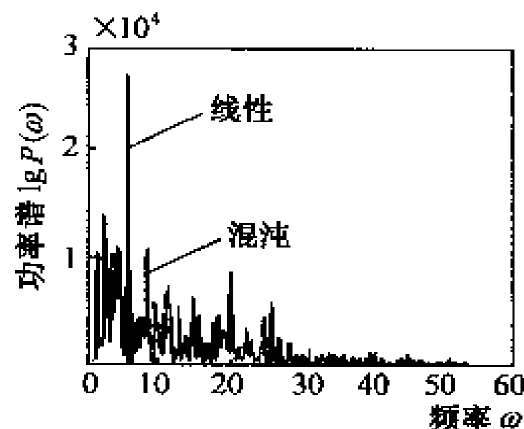


图 6－28　功率谱比较

就是混沌隔振的基本原理。初步试验表明，该方法是可行的[36]。

参考文献

[1] 严济宽. 机械振动隔离技术. 上海：上海科学技术出版社，1986.

[2] 宋孔杰. 设备阻抗和支承结构阻抗对隔振效果的影响. 噪声与振动控制，1984(6)：2～7.

[3] Sciulli D and Inman D J. Isolation Design for a Flexible System. Journal of Sound and Vibration. 1998，216(2)：251－267.

[4] 朱石坚，何琳. 船舶机械振动控制. 北京：国防工业出版社，2006.

[5] 陈树勋. 基础的柔性对于传递率的影响. 振动与冲击. 1984(1)：41～54.

[6] Christensen R M. 粘弹性力学引论. 郝松林，老亮译. 北京：科学出版社，1990.

[7] Harrison M，Sykes A O and Martin M. Wave Effects in Isolation Mounts. Journal of the Acoustic Society of America. 1992，24(1)：62－71.

[8] Snowdon J C. Handbook of Vibration and Noise Control. Report TM 79－75. U. S. Department of the Navy，1979.

[9] Fey V R and Rivin E I. The Science of Innovation. The TRIZ Group. W. Bloomfield，MI. 1997.

[10] Rivin E I. Stiffness and Damping in Mechanical Design. Marcel Dekker Inc. ，1999.

[11] Rivin E I. Interrelation of Stiffness and Damping in Machine Tool Dynamics. In Transaction of the North American Manufacturing Research Institution of SME. 2001，137－143.

[12] Rivin E I. Passive Engine Mounts – Directions for Future Development. SAE Transactions. 1985，3. 582－3. 592.

[13] DenHartog J P. Mechanics. New York:Dover Publications Inc. ,1961.
[14] Himelblau H and Rubin S. Vibration of a Resiliently Supported Rigid Body. Ch. 3 in Shock and Vibration Handbook. Edited by Harris C. New York:McGraw – Hill,1988.
[15] Rivin E I. Passive Vibration Isolation. New York:ASME Press,2003.
[16] Zavala P A G,Pinto M G *et al*. Powertrain Mounting Development Based on Computational Simulation and Experimental Verification Method. Proceeding of the 2001 SAE Noise and Vibration Conference. SAE paper 2001 – 01 – 1509.
[17] NAVSEA 0900 – LP – 089 – 5010. Navy Resilient Mount Handbook. A User Guide of Design,Installation and Inspection Information,1997.
[18] Babitsky E I and Veprik A M. Universal Bumpered Vibration Isolator for Severe Environment. Journal of Sound and Vibration. 1988,218(2):269 – 292.
[19] Military Standard Mil – STD – 810E. Statistical Concepts in Vibration. Ch. 11 in Shock and Vibration Handbook, edited by Harris C,3rd ed. , New York: McGraw – Hill,1988.
[20] C. L. Kirk. Non – linear Random Vibration Isolatiors. Journal of Sound and Vibration. 1988, 124(1): 157 – 182.
[21] Ravindra B and Mallik A K. Hard Duffing – type Vibration Isolator with Combined Coulomb and Viscous Damping. International Journal of Non – Linear Mechanics 1993, 28(4); 427 – 440.
[22] Ravindra B and Mallik A K. Performance of Non – Linear Vibration Isolators under Harmonic Excitation. Journal of Sound and Vibration. 1994, 170(3): 325 – 337.
[23] 庄表中,陈乃力,秦瑞芬.非线性隔振器的鉴别及其受白噪声激励时的响应分析.振动与冲击.1984(2):50 ~ 57.
[24] 庄表中,王建华,邢宏.关于非线性隔振系统动态特性的描述方法.振动与冲击.1986(4):33 ~ 36.
[25] 田千里,高赞明,倪一清.用钢丝绳减振器控制结构振动.机械强度.1991,13(4):7 ~ 10.
[26] 庄表中,邢宏,高瞻.非线性隔振器的应用与传递率的定义.机械强度.1991,13(1):14 ~ 17.
[27] 彭献,唐驾时.非线性隔振理论初探.振动与冲击.1996,15(4):13 ~ 17.
[28] Lou Jingjun, Zhu Shijian, He Lin, et al. Application of Chaos Method to Line Spectra Reduction. Journal of Sound and Vibration. 2005, 286(3): 645 – 652.
[29] 郑兆宁,向大威.水声信号被动检测与参数估计理论.北京:科学技术出版社,1983.
[30] 龙运佳,杨勇等.重型自行式混沌振动压路机.中国农业大学学报,2000,5(2):12 ~ 14.

[31] 龙运佳,王聪玲,张平等.基于混沌理论的振动压路机.中国农业大学学报,1998,3(2):19~22.
[32] Novak S and Frehlich R G. Transition to Chaos in the Duffing oscillator. Physical Review A. 1982, 26(6):3660-3663.
[33] Fang T and Dowell E H. Numerical Simulations of Periodic and Chaotic Responses in a Stable Duffing System. International Journal of Non-linear Mechanics. 1987, 22(3):401-425.
[34] Szemplinska-Stupnicka W. Secondary Resonances and Approximate Models of Routes to Chaotic Motion in Non-linear Oscillators. Journal Sound and Vibration. 1987, 113(1):155-172.
[35] 陈式刚.映象与混沌.北京:国防工业出版社,1992:63~67.
[36] Lou Jingjun, Zhu Shijian, et al. Experimental Chaos in Nonlinear Vibration Isolation System. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. (in edition).

第7章 隔振效果评估指标

隔振的目的是为了减小振动的传递。对于工程实践中具体的隔振设计而言,人们最关心的无疑是通过隔振,被保护对象的振动量级获得了多大程度的衰减或控制。在隔振设计时,对系统的结构参数优化设计一般是围绕隔振效率展开的。因此,效果评估指标的确定是效果评估体系的核心内容。完整的效果评估体系应包含两方面的内容:其一是对系统的隔振效果进行理论分析预测;其二是对实际隔振效果进行测定。目前常用的隔振效果评估指标有力传递率、插入损失、振级落差、功率流等。一般以力传递率作为隔振效果的理论预测依据;但是对于实际效果的测定,由于力传递率是不易测量的,因而通常采用插入损失或振级落差来评定各种实际系统的隔振效果。由于设计指标(传递率)未能与测量指标(插入损失或振级落差)不一致,20世纪80年代又提出了振动功率流概念。本章将详细分析比较这几个指标。

7.1 力传递率

力传递率是最早的隔振效果评估指标,定义为传递至基础的力与激励力之比。第5章给出了刚性基础($m_f=\infty$)情况下系统阻尼分别为黏性阻尼和迟滞阻尼时的力传递率,见式(5-6)和式(5-18)。在工程实际中,特别是在船舶上,安装基座都是非刚性的,因此就会出现这样的现象:同一台设备采用相同的弹性支承,但安装在不同型号的船舶上或装在同一船舶的不同位置,其隔振效果是不同的。这是由于基座阻抗特性的变化对隔振效果的影

响。6.1 节分析了基础阻抗对传递率的影响。当隔振器分别用阻抗和四端参数描述时的力传递率见式(6－5)和式(6－9)。当式(6－5)用分贝表示时，常写成下列形式

$$L_T = 20\lg\frac{1}{T_A} = 20\lg\left|\frac{Z_I \cdot Z_M + Z_I \cdot Z_F + Z_M \cdot Z_F}{Z_I \cdot Z_F}\right| \quad (\mathrm{dB}) \tag{7-1}$$

因为取了倒数，所以凡表示有衰减作用的 L_T 都大于 0。

基于式(5－6)、式(5－18)、式(6－5)、式(6－9)或式(7－1)的隔振效果评价，从表面上看简单可行，但实际上却给测量带来了很大的困难。设隔振设备 A 的质量为 m，其转动部分的质量 m_r，偏心距为 e，转动角速度 ω，如图 7－1 所示[1]。由于偏心引起的铅锤激振力为

$$F = m_r e\omega^2 \sin\omega t = F_0 \sin\omega t \tag{7-2}$$

如果设备和基础(支承结构)C 固连，且设基础是完全刚性的，则此力直接作用在基础上，如果设备和基础之间加装隔振器，其弹簧刚度为 k，阻尼系数为 c，则通过隔振器传给基础的力为 $F_T = |kx + c\dot{x}T|$，则相应的力传递率为 $T_A = F_T/F_0$。实测传递率就是测量 F_0、F_T，需用力传感器 B 串联在隔振前后的系统内，即串联在图 7－1(a)、(b)的系统内，这在现场隔振测量中很难做到。进一步的分析表明，通过图 7－1(a)串联力传感器实测的力值，与基础的结构有关，即实测的力是 F_l 而不是 F_0。整个测量系统如图 7－2 所示，该系统的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k_T(x_1 - x_2) &= F_0\sin\omega t \\ m_f\ddot{x}_2 + k_T(x_2 - x_1) + k_f x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7-3}$$

式中：k_T 为传感器的刚度；k_f 为支承结构的当量刚度。

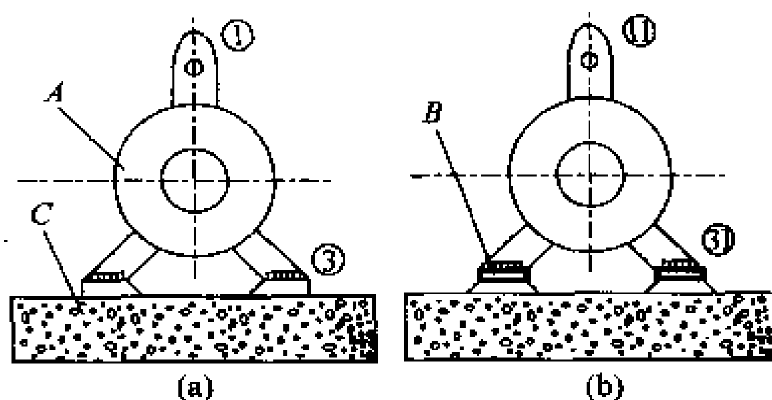


图 7-1　存在偏心质量的旋转机械

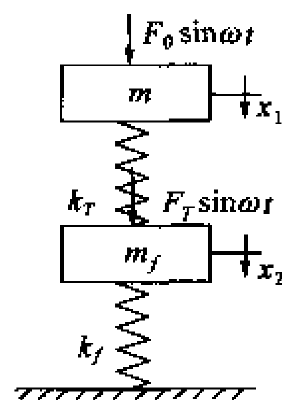


图 7-2

假设式(7-3)的解为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\sin\omega t \\ x_2 &= A_2\sin\omega t \end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

代入式(7-3)得

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= \frac{k_f + m_f\omega^2}{(k_T + m\omega^2)(k_f + k_T + m_f\omega^2) - k_T^2}F_0 \\ &\approx \frac{1}{k_T\left[\left(1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - \dfrac{m}{m_f}\dfrac{\omega_n^2}{\omega_f^2 + \omega^2}\right]}F_0 \end{aligned} \tag{7-5}$$

式中:$\omega_n^2 = k_T/m$,$\omega_f^2 = k_f/m_f$。传感器测到的力 F_T 为

$$F_T = k_T(A_1 - A_2) = \beta F_0 \tag{7-6}$$

式中:$\beta = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - \dfrac{m}{m_f}\dfrac{\omega_n^2}{\omega_f^2 + \omega^2}}$。显然,在一般情况下由力传感器测得的力 F_t 不是激振力 F_0,而是相差一个系数 β。只有当力传感器的刚度很大,而支承结构的质量比起设备大得多的情况下,即 $\omega_n \gg \omega$ 且 $m_f \gg m$ 时,$\beta \to 1$,才能得到 $F_T = k_T(A_1 - A_2) \approx F_0$。在工程实际中,上述条件很难满足。为此,必须引入其它的评估指标,以便于隔振效果的实际测量,常用的有插入损失和振级落差。

7.2 插入损失

隔振系统的插入损失定义为采取隔振措施前后基础响应的有效值之比的常用对数的20倍。随着所选取的基础响应的不同，相应地有位移插入损失、速度插入损失和加速度插入损失。与插人损失相对应的概念是插人响应比 R，定义为有隔振装置时基础响应与没有隔振装置时基础响应的比值。

以速度响应为例，对图6-1所示的系统，插入响应比 R 的表示为

$$R = \frac{V_2}{V_{2R}} = \left| \frac{Z_I \cdot Z_M + Z_I \cdot Z_F}{Z_I \cdot Z_M + Z_I \cdot Z_F + Z_M \cdot Z_F} \right| \qquad (7-7)$$

若用插入响应比的倒数 $E = 1/R$ 来评价隔振效果，则 E 称为隔振有效性。相应地，系统的插人损失的表达式为

$$L_I = 20\lg \frac{1}{R} = 20\lg \left| \frac{Z_I \cdot Z_M + Z_I \cdot Z_F + Z_M \cdot Z_F}{Z_I \cdot Z_M + Z_I \cdot Z_F} \right| \quad (\text{dB}) \qquad (7-8)$$

由于取了倒数，所以凡表示有衰减作用的 L_I 均为正值。根据式(6-4)，有

$$L_I = 20\lg \frac{V_{2R}}{V_2} = 20\lg \frac{F_{2R}}{F_2} \qquad (7-9)$$

即插入损失又等于刚性安装时传至基础的力与弹性安装时传至基础的力之比，故式(7-9)定义了基于插入损失概念的力传递率。

插人损失可以实测，但实施较为困难。如果船舶是成批建造的，结构、尺寸及所用设备完全相同，只是设备的安装方式不同，则在不同安装方式的两艘船上，进行同一点振动响应的测量，就可以得到插入损失的较准确的数据[2]。但对实船上已装好的弹性安

装机组，将其重新换装成刚性安装进行测量将难以实施，特别是对于大型机组，则几乎不可能。对于中小型机组，可以专门制作一些与隔振器同样高度的钢块，换下全部隔振器，将机组改装为刚性支承进行测量。也可用带斜面的钢楔近似代替钢块，但这样做改变了支承条件，削弱了支承刚性，影响到测量精度。

图 7－3 示出了装在某型橡胶隔振器上的空气压缩机采用上述两种方法测量插入损失的结果比较[3]。从图中可以看出，两种方法测得的曲线在低频段近乎一致，但近似法的结果略低，一般在中频范围内低约(2～3)dB，在高频范围内则相差(5～6)dB。

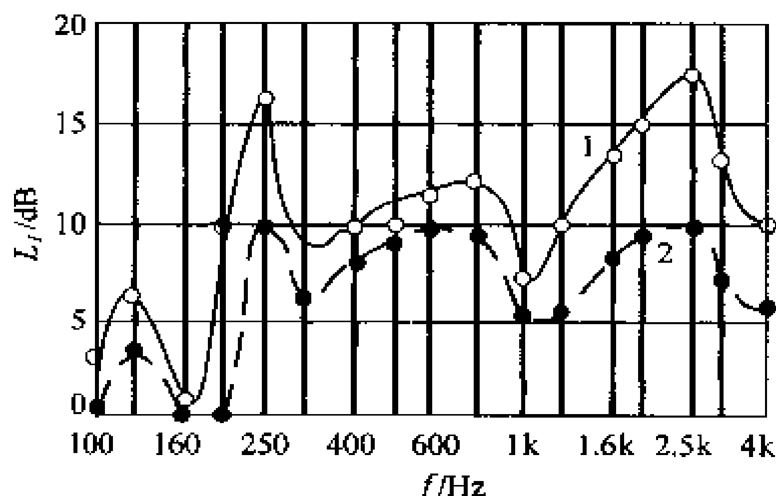


图 7－3　装在橡胶隔振器上空气压缩机插入损失实测结果比较
1—精确法(装铁块)；2—近似法(装钢楔)。

7.3　振级落差

振级落差定义为被隔振设备振动响应的有效值与对应基础响应的有效值之比的常用对数的 20 倍。和插入损失一样，振动响应可以是位移、速度或加速度，相应地称为位移振级落差、速度振级落差和加速度振级落差。对于单频简谐振动而言，三者是一致的。振级落差有时又被称为传输损失。与振级落差相对应的概念是振级落差比。以速度响应为例，对图 6－1 所示的系统，振级落差比

D 定义为

$$D = \frac{V_1}{V_2} = \left| \frac{Z_I + Z_F}{Z_I} \right| \tag{7-10}$$

振级落差 L_D 与振级落差比 D 的关系为

$$L_D = 20\lg(D) = 20\lg \left| \frac{Z_I + Z_F}{Z_I} \right| \quad (\text{dB}) \tag{7-11}$$

当用振级表示时，有

$$L_D = 20\lg \frac{V_1/V_0}{V_2/V_0} = 20\lg \frac{V_1}{V_0} - 20\lg \frac{V_2}{V_0} = L_{V1} - L_{V2} \quad (\text{dB}) \tag{7-12}$$

式中：L_{V1} 及 L_{V2} 相应地为隔振器上下方的振动速度级；V_0 为基准速度；$V_0 = 1\text{nm/s}$。

振级落差的测量比较容易实现，也是实践中用得最多的。根据所测的量分为速度振级落差和加速度振级落差，但两者既相互联系，又有区别。

振动的传递主要是能量的传递，速度能代表传递能量的大小；而在测量中，一般都使用加速度传感器，要得到速度则必须通过积分网络，容易引起误差，且加速度能正确反映高频振动情况。事实上，对于频率一定的简谐振动而言，速度和加速度之间具有简单的转换关系，因此在同一窄带频率上，速度振级落差和加速度振级落差事实上是一样的。如果要求用总振动级来评价隔振系统的隔振效果，则必须说明用的是速度振级落差还是加速度振级落差，因为总振动级综合了各种频率分量，选用速度振级落差或加速度振级落差所得出的总振级落差是不同的。

在工程实践中，机械设备的干扰源往往非常复杂，且由多个频率成分组成，而隔振装置中各组成元件的阻抗特性也是随频率变化的，因此在各个频率下的隔振效果是各不相同的。一般用频谱曲线绘出 $V_1(f)$ 及 $V_2(f)$ 的变化情况，并以低阶主要干扰频率处的振级落差来表示隔振装置的隔振效果。

从式(7－10)、式(7－11)可以看出,振级落差与机组的阻抗特性 Z_M 无关,只取决于隔振器和基础的阻抗特性。在隔振器一定的情况下,基础阻抗特性的变化将对振级落差产生很大的影响。当基础刚性很大时,无论扰动频率怎样变化,V_2/V_1 总是一个很小的值,即使扰动接近甚至等于隔振系统的固有频率时,V_2/V_1 也不会很大,以至得出隔振效果良好的错误评价。而当基础刚性不大时,当扰动频率与基础的第一阶固有频率相一致时,Z_F 达到最小值,L_D 会出现低谷,从而得出隔振效果不佳的片面评价。这是因为振级落差是直接在隔振器上、下测量的,受基础支承而局部振动的影响极大。俄罗斯专家曾对一百多艘船舶进行了实测[4],发现不管采用何种隔振器,有70%的情况在250Hz附近振级落差要下降,有20%是在500Hz附近要下降,有10%则在125Hz附近要下降。在这三个中心频率处,隔振效果之所以明显下降,完全是由于船舶基础面板局部共振所致。荷兰专家在进行同样的研究时也得出了类似的结论[5]。因此,振级落差这个指标并不能确切地反映隔振装置的真实隔振效果,它只能作为一种近似的评价指标。

7.4 各评估指标之间的关系

在力传递率、插入插失、振级落差三个指标中,在非刚性基础情况下,插入损失适合作为隔振效果评价指标。但是由于插入损失的实测比较困难,因此有必要进一步讨论三者之间的关系,以利用实测振级落差来估算插入损失。

从式(7－1)、式(7－8)及式(7－11)可以得出插入损失与力传递率之差为

$$L_I - L_T = 20\lg\left|\frac{Z_F}{Z_F + Z_M}\right| = 20\lg\left|\frac{1}{1 + Z_M/Z_F}\right| \quad (7-13)$$

振级落差与插入损失之差为

$$L_D - L_I = 20\lg\left|1 + \frac{Z_F^2}{Z_I \cdot Z_M + Z_I \cdot Z_F + Z_F \cdot Z_M}\right|$$

$$\approx 20\lg\left|1+\frac{1}{Z_M/Z_F}\right| \tag{7-14}$$

振级落差与传递率之差为

$$L_D - L_T = 20\lg\left|\frac{Z_I \cdot Z_F + Z_F^2}{Z_I \cdot Z_M + Z_I \cdot Z_F + Z_F \cdot Z_M}\right|$$

$$\approx 20\lg\left|\frac{1}{Z_M/Z_F}\right| \tag{7-15}$$

由以上三式可知，插入损失和力传递率之差仅与 Z_M/Z_F 有关，而与弹性支承的阻抗特性 Z_I 无关。振级落差虽只取决于弹性支承和基础结构的阻抗特性，而与设备的阻抗特性无关，但它与力传递率之间的差异仍与 Z_M/Z_F 有关。一般隔振器的阻抗 Z_I 比起基础的阻抗 Z_F 来要小得多，因此在式(7－14)、式(7－15)中做了近似处理。各种 Z_M/Z_F 比值下三者之间的关系如表 7－1 及图7－4 所示[6]。

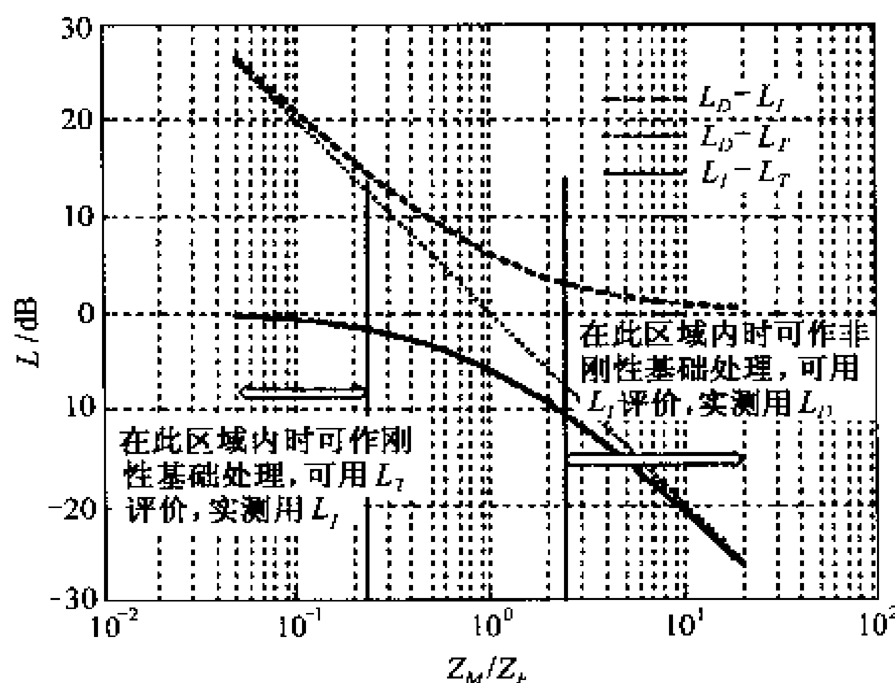


图 7－4　不同 Z_M/Z_F 比值下各种评价指标之间的关系

表 7-1　不同 Z_M/Z_F 比值下各种评价指标之间的关系

Z_M/Z_F	1/20	1/10	1/8	1/6	1/4	1/2	1	2	4	6	8	10	20
L_I-L_T	-0.4	-0.8	-1.0	-1.3	-1.9	-2.5	-6.0	-9.4	-14.0	-16.0	-19.0	-20.8	-26.4
L_D-L_I	26.4	20.8	19.1	16.9	14.0	9.5	6.0	3.5	1.9	1.3	1.0	0.8	0.4
L_D-L_T	26.0	20.0	18.0	15.6	12.0	6.0	0	-6.0	-12.0	-15.6	-18.0	-20.0	-26.0

从表 7-1 可以看出：

(1) 当 $Z_F>>Z_M$ 时，$L_I-L_T\to 0$，这时的插入损失接近力传递率，且基础的刚性越大，两者越接近。在极限情况下，当基础为完全刚性时，两者之差为零。因此在这种情况下，可以用插入损失来代替传递率。但此时的振级落差→∞，即此时如采用振级落差来评价隔振效果，将会失去意义。因此，陆用机组一般不采用振级落差来评价隔振效果。一般可用插入损失代替传递率的大致范围为 $Z_M/Z_F\leqslant 0.25$。

(2) 当 $Z_F\approx Z_M$ 时，$L_D-L_T\to 0$，这时的振级落差接近力传递率，而插入损失则相差较大。一般当 $0.7\leqslant Z_M/Z_F\leqslant 1.4$ 时，可用振级落差来代替传递率。在工程实际中对装有公共底座的小型隔振机组（如船用辅机、泵、压气机等）上船安装后就属于这种情况。此外，一般试验台的基础阻抗要比发动机阻抗大 2 倍左右，基本上也属于这个范围。从表中可以看出，在这个范围内振级落差和插入损失之间的差值为(5~10)dB。

(3) 当 $Z_F\ll Z_M$ 时，$L_D-L_I\to 0$，在此区域内，无论是插入损失还是振级落差都和传递率相差很大，但插入损失和振级落差的差值随着 Z_M/Z_F 的增大而逐渐减小。因此，在此范围内用振级落差代替插入损失所带来的误差不大。

一般当 $Z_M/Z_F\geqslant 0.25$ 时，$L_D-L_I\leqslant 3$dB。在这种情况下，可用

振级落差来评定隔振效果。在船舶工程实践中，根据大量实船测量的结果[7]，船舶内燃机的 Z_M/Z_F 值约为 3～4，即船舶内燃机安装基座的阻抗远小于其上机组的阻抗，已不符合刚性基础的假设，不能再用传递率来衡量隔振效果，但可以用振级落差代替插入损失进行评价，且误差不大。因此在船舶行业中振级落差被广泛采用。

在工程实践中，人们还希望能从实测到的振级落差 L_D 推算出插入损失 L_I，或在设计阶段就能预测实船安装后的隔振效果，下面用四端参数法来讨论。

不论是单层隔振系统还是双层隔振系统，当一个四端机械系统（α_{jk}）插入到设备 Z_M 与基础 Z_F 之间时，其插入损失及振级落差分别为

$$L_I = 20\lg\left|\frac{\alpha_{11}\cdot Z_F + \alpha_{12} + Z_M(\alpha_{21}\cdot Z_F + \alpha_{22})}{Z_F\cdot Z_M}\right| \qquad (7-16)$$

$$L_D = 20\lg|\alpha_{21}\cdot Z_F + \alpha_{22}| \qquad (7-17)$$

在单层隔振系统中，当采用通常的隔振器时，有

$$\alpha_{11} = 1;\alpha_{12} = 0;\alpha_{21} = 1/Z_I;\alpha_{22} = 1 \qquad (7-18)$$

假设被隔振设备和基础是质量分别为 M 和 M_F 的两个集中质量块，隔振器的刚度为 K，阻尼为 C，则有

$$Z_M = \mathrm{i}\omega M;Z_F = \mathrm{i}\omega M_F;Z_I = \frac{K+\mathrm{i}C\omega}{\mathrm{i}\omega} \qquad (7-19)$$

将式(7－18)、式(7－19)代入式(7－16)和式(7－17)，可以得到

$$L_I = 20\lg\left|1+\frac{Z_M\cdot Z_F}{Z_I(Z_M+Z_F)}\right| =$$

$$10\lg\left|1+\frac{\omega^2\cdot M_{MF}}{K}\cdot\frac{\dfrac{\omega^2\cdot M_{MF}}{K}-2}{1+\dfrac{C^2\omega^2}{K^2}}\right| \quad (\mathrm{dB}) \qquad (7-20)$$

$$L_D = 20\lg\left|1 + \frac{Z_F}{Z_I}\right| =$$

$$10\lg\left|1 + \frac{\omega^2 \cdot M_F}{K} \cdot \frac{\frac{\omega^2 \cdot M_F}{K} - 2}{1 + \frac{C^2\omega^2}{K^2}}\right| \quad (\mathrm{dB}) \tag{7-21}$$

式中：$M_{MF} = \dfrac{M \cdot M_F}{M + M_F}$。

引入下列无量纲参数：质量比 $m = \dfrac{M_F}{M}$；频率比 $\eta = \dfrac{\omega}{\omega_n}, \omega = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$；阻尼比 $\zeta = \dfrac{C}{C_C}, C_C = 2\sqrt{KM}$，可得插入损失及振级落差

$$L_I = 10\lg\left|1 + \frac{m\eta^2 \cdot (m\eta^2 - 2m - 2)}{(m+1)^2 \cdot (1 + 4\zeta^2\eta^2)}\right| \quad (\mathrm{dB}) \tag{7-22}$$

$$L_D = 10\lg\left|1 + \frac{m\eta^2 \cdot (m\eta^2 - 2)}{1 + 4\zeta^2\eta^2}\right| \quad (\mathrm{dB}) \tag{7-23}$$

对照式(7－22)、式(7－23)，有

$$L_I(m) = L_D\left(\frac{m}{m+1}\right) \tag{7-24}$$

从式(7－22)、式(7－23)还可以得出

$$L_D - L_I = 20\lg\beta \cdot (m+1) \quad (\mathrm{dB}) \tag{7-25}$$

式中：$\beta = \sqrt{\dfrac{\dfrac{4\zeta^2}{m^2} + \left(\eta - \dfrac{1}{m\eta}\right)^2}{\left(4\zeta^2 + \dfrac{1}{\eta^2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^2 - 2\left(1 + \dfrac{1}{m}\right) + \eta^2}}$。

实测得到振级落差 L_D 后，可根据式(7－25)估算插入损失 L_I。

当频率很高时，式(7－22)、式(7－23)可简化为

$$L_I \approx 20\lg \frac{m\eta}{2\zeta(m+1)} \quad (\mathrm{dB}) \tag{7-26}$$

$$L_D \approx 20\lg \frac{m\eta}{2\zeta} \quad (\mathrm{dB}) \tag{7-27}$$

随着频率的增高，L_D及 L_I每一倍频程的衰减均为 6dB，两者之差为

$$L_D - L_I \approx 20\lg(m+1) \quad (\mathrm{dB}) \tag{7-28}$$

从式(7-28)可以看出，对于给定的质量比 m，振级落差与插入损失之差是一个常数；当 $m \to 0$ 时两者之差为 0，当 $m \to \infty$ 时两者之差$\to \infty$。

从式(7-26)和式(7-28)还可以得出

(1) 当 $M_F \to \infty$ 时，$m \to \infty$，$L_I = 10\lg\left[1+\eta^2\left(\frac{\eta^2-2}{1+4\zeta^2\eta^2}\right)\right] = 20\lg \frac{1}{T_A} = L_T$，而 m 越小，L_D越接近于 L_I，随着 m 的增大，两者之间的差值也增大。

(2) 当 $m=1$ 时，如 η 小于 2，从插入损失 L_I来看无隔振效果，但如以振级落差 L_D来评价，则在相当宽的频率范围内还可有 10dB 以下的隔振效果。

(3) 当 $\eta \to 1$ 时，即在共振区附近时，从插入损失 L_I来看，不论 m 值多大，均无隔振效果。但从振级落差 L_D来看，只要 $m>2$，都有隔振效果，且 m 值越大，隔振效果越好，这显然是不合理的。

因此，在用振级落差 L_D评价隔振效果时，要注意在有些频率范围内，不能用振级落差值来推算插入损失值。

7.5 功率流

如前所述，在经典隔振理论中，力传递率是隔振效果的理论预测依据；但是对于系统实际效果的测定，力传递率是不易测量的。即使可以测量，传感器测到的力值与基础的结构有关，见 7.1 节。

因此，通常采用另外两个指标——插入损失和振级落差——来评定各种实际系统的隔振效果。这种效果评估体系在设计理论意义上是不完善的，因为设计指标未能与测量指标取得一致。同时，随着隔振理论与实践的发展，人们逐渐发现力传递率作为效果预测指标其实是有缺陷的，对于非对称的多激励源、多支承柔性基础隔振系统，力传递率所反映的仅是动态力的传递关系，而未能兼顾或完全兼顾到基础对于传递力的响应；另一方面，实测振级落差尽管以响应加速度功率谱的比值的形式给出，由于未计入视在质量的影响，故对于系统动力传递特性的反映也不完全，并且它还忽略了部分振源设备信息。

振动功率流分析理论是从物理学的功率概念引申出来的，它是基于下述观点，即振动的传递主要是一种能量的传递，因此从能量传输角度研究振动控制问题更加科学合理。1980 年，H. G. Goyder 和 R. G. White[8-10]首先提出了隔振系统的振动功率流概念，并研究了简单无限均质梁、板构件中纵向波、弯曲波、扭转波等各种波的分量对构件中功率流的贡献，推导了在理想常力源和常速源激励下，单层和双层隔振系统中通过单支承进入无限大基础结构的功率流表达式，证明了双层隔振比单层隔振优越；同时还建立了在频率响应平均意义下用无限结构近似代替实际有限结构的导纳近似表达式，而后进一步研究了较为复杂的结构——两平行构件中功率流的传播机理。

目前理论界较为普遍的看法是，功率流分析方法的优点主要有以下几个方面[11,12]。

（1）功率流概念给出了振动传输的一个绝对度量，它既包含力和速度的幅值大小，也考虑了它们之间的相位关系。功率流的密度可以在结构上某点通过测量获得，从而了解系统内部的能量分布状况。

（2）对振动系统进行功率流分析，易于理解振动传输机理，可以将振源功率、系统损耗功率、结构储能变化率和波动功率流相互联系起来进行研究，并且可以清楚地表明每一个支承点或一台机

组对于结构的能量输入,有利于隔振系统的设计。

(3) 对各种振动控制方法,都可以统一用传递功率流概念进行解释,即减小振源输入结构的功率流,或在振动传输路径上设法降低和控制传递的能级。

研究振动控制问题并非自功率流方法始,但作为一种综合的系统动态特性预测与评估指标,功率流的提出对于隔振分析理论的发展具有无可争议的深远意义。

7.5.1 功率流的一般表达式[13]

1. 简谐激励情况

功率是单位时间内所作的功,其表达式为

$$P = F \cdot V \tag{7-29}$$

式中:F 及 V 分别代表结构上某点处的作用力和响应速度的瞬时值。

对于振动系统,按时间平均的功率流比瞬时值更重要,更具有实际意义。如果力和速度是简谐变化的,则有

$$F = |F| \cos\omega t, \quad V = |V| \cos(\omega t + \phi) \tag{7-30}$$

按时间平均的功率流可以表示为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T |F| \cdot |V| \cdot \cos\omega t \cdot \cos(\omega t + \phi)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}|F| \cdot |V| \cdot \cos\phi \end{aligned} \tag{7-31}$$

式中:$T = 2\pi/\omega$。

如果将力和速度分别表示为

$$F(t) = \mathrm{Re}(F \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}), \quad V(t) = \mathrm{Re}(V \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \tag{7-32}$$

则有

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Re}(F \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) \cdot \mathrm{Re}(V \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})\,\mathrm{d}t \tag{7-33}$$

若记 F、V 的共轭分别为 F^*、V^*，则

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(F^* \cdot V) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(F \cdot V^*) \qquad (7-34)$$

式(7－34)为对某一结构的输入功率的最一般表达式。如果将输入点的点导纳 $H = V/F$ 及点阻抗 $Z = F/V$ 分别代入式(7－34)，可以得到

$$P = \frac{1}{2}|F|^2 \cdot \mathrm{Re}(H) \qquad (7-35)$$

$$P = \frac{1}{2}|V|^2 \cdot \mathrm{Re}(Z) \qquad (7-36)$$

式(7－34)为直接测量法，式(7－35)和式(7－36)为间接测量法。后两式易于实测，因而是最常用的形式。其中式(7－35)多用于力源，式(7－36)多用于速度源。

在工程实践中常用加速度计进行振动测量，考虑到

$\dfrac{V(\omega)}{F(\omega)} = H$ （导纳）；

$\dfrac{F(\omega)}{V(\omega)} = Z$ （阻抗）；

$\dfrac{a(\omega)}{F(\omega)} = I$ （动惯性或加速度导纳）；

$\dfrac{F(\omega)}{a(\omega)} = A$ （视在质量或加速度阻抗）。

以及 $I = (\mathrm{i}\omega)\cdot H$，$A = Z/(\mathrm{i}\omega)$，$V = a/(\mathrm{i}\omega)$，式(7－35)和式(7－36)又可分别写为

$$P = \frac{1}{2\omega}\cdot |F|^2 \mathrm{Im}\{I\} \qquad (7-37)$$

$$P = \frac{1}{2\omega}\cdot |a|^2 \mathrm{Im}\{A\} \qquad (7-38)$$

2. 随机激励情况

当结构受随机力作用时，如果该力的谱密度为 G_{FF}，在此点所

激起的加速度的谱密度为 G_{aa}，速度的谱密度为 G_{VV}，则输入功率的谱密度(即单位频率的按时间平均的输入功率)为

$$P = G_{FF} \cdot \mathrm{Re}(H) = \mathrm{Re}(G_{FV}) = G_{VV} \cdot \mathrm{Re}(Z) \quad (7-39)$$

上式还可表示为

$$P = \frac{1}{\omega} \cdot \mathrm{Im}(G_{Fa}) = \frac{1}{\omega} \cdot G_{aa} \cdot \frac{\mathrm{Re}(Z)}{\omega} \quad (7-40)$$

式中：G_{Fa}为力和加速度的互谱密度；G_{FV}为力和速度的互谱密度。

7.5.2 通过隔振器的功率流

由于功率是力和速度的乘积，因此可用四端参数法进行分析。图 7－5 示出了隔振系统的示意图及其四端参数表示法。

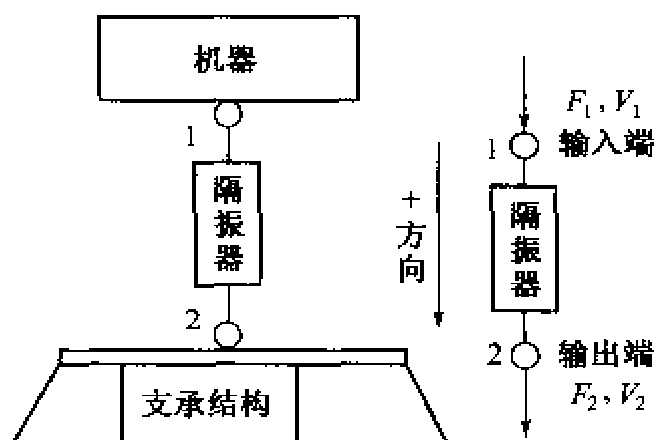


图 7－5 隔振装置及其四端参数表示法

按照四端参数的定义，任何隔振器，作为一个线性弹性系统，都可以用下列的线性方程来描述

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (7-41)$$

式中：F_1, V_1 及 F_2, V_2 分别代表作用在隔振器的输入点及输出点的力和速度，其正方向如图 7－5 所示。β_{jk}为用于表征隔振器动力特性的四端参数。按照式(7－34)，通过隔振器的功率流的表达式可写为

$$P_{tr} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Re}(F_2 \cdot V_2^*) \quad (7-42)$$

将式(7－41)中的 F_2 代入式(7－42)中，可得

$$P_{tr} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Re}\{(Z_{12}^{2B}) \cdot V_1 \cdot V_2^* - (Z_2^{1B}) \cdot |V_2|^2\} \quad (7-43)$$

式中　$Z_{12}^{2B} = \frac{\mathrm{i}}{\beta_{21}}$——当输出端钳制时隔振器的传递阻抗；

$Z_2^{1B} = \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}}$——当输入端钳制时隔振器在输出端的点阻抗。

对于对称的隔振器，$\beta_{22} = \beta_{11}$，所以其输出端的阻抗等于输入端的点阻抗，即 $Z_1^{2B} = Z_2^{1B}$。

在工程实践中，加速度值较速度值容易测得，与此相适应一般采用视在质量（A）而不用阻抗（Z）进行计算。为此可将式(7－43)改写为

$$P_{tr} = \frac{1}{2\omega} \cdot \mathrm{Im}\{(A_{12}^{2B}) \cdot a_1 \cdot a_2^* + (A_2^{1B}) \cdot |a_2|^2\} \quad (7-44)$$

式中：A_{12}^{2B} 为隔振器的传递视在质量，A_2^{1B} 为隔振器的点视在质量。图 7－6 给出了两者的测量方法。

对于随机激励，则通过隔振器的传递功率谱密度可用下式表示

$$P_{tr} = \frac{1}{\omega} \cdot \mathrm{Im}\{(A_{12}^{2B}) \cdot G_{a_1a_2} + (A_2^{1B}) \cdot G_{a_2a_2}\} \quad (7-45)$$

式中　$G_{a_1a_2}$——隔振器输入、输出端的加速度的互谱密度；

$G_{a_2a_2}$——隔振器输出端的加速度的自谱密度。

通常情况下，式(7－44)和式(7－45)中的第二项和第一项相比都是非常小的，在工程上可以忽略不计。因此，上两式可以分别简化为

$$P_{tr} = \frac{1}{2\omega} \cdot \text{Im}\{(A_{12}^{2B}) \cdot a_1 \cdot a_2^*\} \tag{7-46}$$

$$P_{tr} = \frac{1}{\omega} \cdot \text{Im}\{(A_{12}^{2B}) \cdot G_{a_1a_2}\} \tag{7-47}$$

从式(7－46)和式(7－47)可以看出，只要知道隔振器的动力特性，即可方便地根据实测到的加速度值计算出通过隔振器的功率流。考虑到实测得到的加速度值可能包含其它振源的贡献，所以，这种方法可用于多个支承点的隔振装置中。对于多支承隔振装置，通过每个隔振器的功率流是分别测量的，而由振源通过弹性支承传递的总的功率，则是各个隔振器传递功率流的总和。

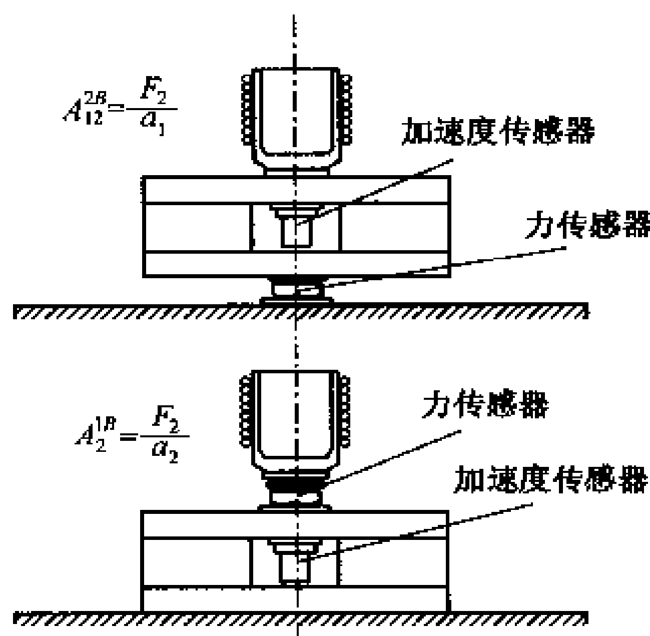


图 7－6　测量橡胶隔振器视在质量的装置图

7.5.3　功率流与隔振效果评估

传递功率流是一个绝对量，其本身并不反映隔振装置的隔振效果，因此需要一个相对指标来定量评价隔振效果。常用的两个指标是功率流传递率和传递功率流落差。

1. 功率流传递率

仿照力传递率的定义，功率流传递率有两种定义。一种是安

装隔振装置前后基础上的传递功率的比值，另一种定义是安装隔振装置后的传递功率流与振源输入的功率流的比值，分别表示为

$$T_{AP} = \frac{P_{tr}}{P_u} \tag{7-48}$$

$$T_{SP} = \frac{P_{tr}}{P_{in}} \tag{7-49}$$

式中：P_{tr}为安装隔振装置后，通过隔振器的传递功率流；P_u 为振源设备直接刚性安装于基础上（无隔振装置）时，基础结构的功率流输入；P_{in}表示振源输入到整个隔振系统的功率流。

下面以图 7－7 所示的单支承、单激励源系统为例，讨论 T_{AP}和 T_{SP}的性质。如图 7－7(a) 所示，当不存在隔振器时，系统的传递功率流为

$$P_u = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{F_{3u} \cdot v_{3u}^*\} \tag{7-50}$$

对上式作简单推导，得

$$P_u = \frac{1}{2}|F_1|^2 \cdot \left|\frac{H_m}{H_m + H_F}\right|^2 \cdot \mathrm{Re}\{H_F\} \tag{7-51}$$

式中：H_m，H_F 分别为振源设备 m 及基础 F 的导纳。

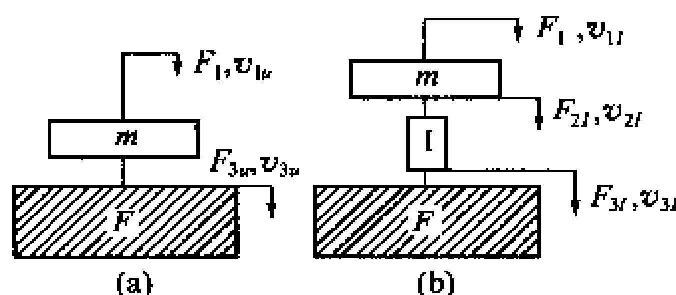


图 7－7　单自由度隔振系统

振源输入到隔振系统的功率流为

$$P_{in} = \frac{1}{2}|F_1|^2 \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{H_m(H_I^B + H_F)}{H_m + H_I^B + H_F}\right\} \tag{7-52}$$

式中：H_I^B 为隔振器的钳制导纳。所以有

$$T_{AP} = \left| \frac{H_m + H_F}{H_m + H_I^B + H_F} \right|^2 \tag{7-53}$$

$$T_{SP} = \left| \frac{H_m}{H_m + H_I^B + H_F} \right|^2 \cdot \mathrm{Re}\{H_F\} /$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{H_m (H_I^B + H_F)}{H_m + H_I^B + H_F} \right\} \tag{7-54}$$

显然，对于完全对称结构系统，T_{AP}和T_{SP}都决定于系统结构参量，而与外界激励无关，并且功率流传递率T_{AP}与力传递率T_A之间存在平方关系。对于一般的多支承、非对称系统，T_{AP}和T_{SP}的性质趋于复杂化。

设F_e为系统激励力列矢量，F_{FI}、F_{Fu}分别为有、无隔振装置时传至基础的动态力列矢量，v_{FI}和v_{Fu}为对应于F_{FI}、F_{Fu}作用点处的速度响应列矢量，T_I和T_u分别为有、无隔振装置时系统的动力传递矩阵，M_F为基础的导纳矩阵，则存在如下关系

$$F_{Fu} = T_u \cdot F_e \tag{7-55}$$

$$F_{FI} = T_I \cdot F_e \tag{7-56}$$

$$v_{Fu} = M_F \cdot F_{Fu} \tag{7-57}$$

$$v_{FI} = M_F \cdot F_{FI} \tag{7-58}$$

于是有

$$P_{tr} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(F_{FI})^H \cdot v_{FI}\} =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(F_e)^H \cdot [(T_I)^H \cdot H_F \cdot T_I] \cdot F_e\} =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(F_e)^H \cdot X_I \cdot F_e\} \tag{7-59}$$

$$P_u = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(F_{Fu})^H \cdot v_{Fu}\} =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(F_e)^H \cdot [(T_u)^H \cdot H_F \cdot T_u] \cdot F_e\} =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(F_e)^H \cdot X_u \cdot F_e\} \quad (7-60)$$

以上两式中，上角标 H 表示 Hermitian 转置。

若系统为单激励源系统，亦即 F_e 仅含有一个分量 f_e，则

$$P_{tr} = \frac{1}{2}|f_e|^2\mathrm{Re}\{X_I\}, P_u = \frac{1}{2}|f_e|^2\mathrm{Re}\{X_u\} \quad (7-61)$$

P_{tr} 与 P_u 的比值 T_{AP} 是与激励无关的量。

若系统中存在 n 个相同频率的激励($n \neq 1$)，记 $F_e = \{f_{e1}, f_{e2}, \cdots, f_{en}\}^T = f_{e1} \cdot \varepsilon^T = f_{e1}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}^T$，($\varepsilon_1 = 1$)；$X_I = [\chi_{I_{jk}}]_{n\times n}$，$X_u = [\chi_{u_{jk}}]_{n\times n}$，则

$$P_{tr} = \frac{1}{2}|f_{e1}|^2\mathrm{Re}\{\sum_{j,k=1}^{n}(\varepsilon_j^* \varepsilon_k \chi_{I_{jk}})\} \quad (7-62)$$

$$P_u = \frac{1}{2}|f_{e1}|^2\mathrm{Re}\{\sum_{j,k=1}^{n}(\varepsilon_j^* \varepsilon_k \chi_{u_{jk}})\} \quad (7-63)$$

此时，如果各激励相位角相同，且是等强度的，$\varepsilon_j = \varepsilon_1 = 1$，$T_{AP}$ 依然与 F_e 无关；若不满足上述条件，则 T_{AP} 就不仅取决于系统的结构参数，还与各激励的相对系数 ε_j 有关。

由此可以得到一个重要结论，即对于一般的多激励振源设备，其隔振设计不仅应考虑诸如隔振器、基础结构、机器等的阻抗特性，还要注意机器内部各激励力的相对系数 ε_j。

对于存在多种不同频率激励成分的系统，可根据不同频率外部激励对输入结构的总功率流之长期贡献相互独立原则，得到与上面相同的结论，并可进一步将其推广到随机激励的情况。

通过类似的分析，可以知道 T_{SP} 具有与 T_{AP} 相似的性质。

需要特别指出的是，T_{AP} 和 T_{SP} 都比绝对量 P_{tr} 更能反映真实的隔振效果，因此，无论是通过理论分析，还是实验研究手段，对功率流传递率进行研究，都有重要的工程应用价值。

2. 传递功率流落差

以功率流传递率 T_{AP} 或 T_{SP} 作为隔振系统的设计依据在理论上是可行的。但是对于实际系统的隔振效果评估而言，和力传递率一样，也存在着实际测量困难的问题。为此引入传递功率流落差的概念。

仿照振级落差的概念，传递功率流落差可以定义为隔振装置上下方功率流之比，即

$$D_P = 10\lg \frac{P_{tr}}{P_{I_{in}}} \tag{7-64}$$

对于图 7-7 所示的简单系统，参照式(7-38)，隔振器的传递功率流 P_{tr} 可表示为

$$P_{tr} = -\frac{|a^b|^2}{2\omega}\mathrm{Im}\{A_F\} \tag{7-65}$$

由上方进入隔振装置的功率流 $P_{I_{in}}$ 为

$$P_{I_{in}} = -\frac{|a^t|^2}{2\omega}\mathrm{Im}\left\{\frac{A_I^B \cdot A_F}{A_I^B + A_F}\right\} \tag{7-66}$$

式中：a^t 和 a^b 分别为隔振装置上、下方的加速度响应；A_I^B 和 A_F 分别为隔振装置和基础的视在质量。

图 7-7 所示系统的加速度振级落差可表示为

$$D_a = 20\lg\left(\left|\frac{a^b}{a^t}\right|\right) = 20\lg\left(\left|\frac{v_{3I}}{v_{2I}}\right|\right) = 20\lg\left(\left|\frac{M_F}{M_I^B + M_F}\right|\right) \tag{7-67}$$

比较式(7-66)和式(7-67)，可知，若忽略点视在质量的影响，有 $D_a = D_P$。因此振级落差未能完全反映振动能量传递过程的真实情况，其本质原因是在忽略视在质量的同时，也忽略了动力传递关系。

已经证明，对完全对称系统，或单激励源非对称系统，或者含有多个等强度、等相位激励源的非对称系统，D_P 仅与系统结构参

数有关;对于更为一般的系统,D_p 还取决于各激励力之间的相对系数 e(参见式(7-62),式(7-63))。特别地,对图 7-7(b)所示的简单系统有

$$\frac{P_{tr}}{P_{I in}} = \frac{\mathrm{Re}\{M_F\}}{\mathrm{Re}\{M_I^B + M_F\}} \tag{7-68}$$

传递功率流落差在工程实践中可以通过测量振动响应来获得。由式(7-65)及式(7-66)可知,可以通过测量隔振器上、下两端的加速度以及基础与隔振器的视在质量,计算出传递功率流落差。也可以仅根据实测振级数据和隔振器的四端参数数据,得到传递功率流落差。事实上,若令(图 7-7)

$$\begin{cases} A_{12}^B = A_{21}^B = \left.\dfrac{F_{3I}(\omega)}{a^t(\omega)}\right|_{a^b=0} = \left.\dfrac{F_{2I}(\omega)}{a^b(\omega)}\right|_{a^t=0} \\ A_2^{1B} = \left.\dfrac{F_{3I}(\omega)}{a^b(\omega)}\right|_{a^t=0} \quad A_1^{2B} = \left.\dfrac{F_{2I}(\omega)}{a^t(\omega)}\right|_{a^b=0} \end{cases} \tag{7-69}$$

则根据四端参数原理,可以得到

$$P_{tr} = -(1/2\omega)\mathrm{Im}\{A_{12}^B \cdot a^t \cdot (a^b)^* + A_2^{1B} \cdot |a^b|^2\} \tag{7-70}$$

$$P_{I_{in}} = \frac{1}{2\omega}\mathrm{Im}\{A_{12}^B \cdot (a^t)^* \cdot a^b - A_1^{2B} \cdot |a^t|^2\} \tag{7-71}$$

对于随机激励,有

$$P_{tr}/\mathrm{Hz} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\{A_{12}^B \cdot G_{a^ba^t} + A_2^{1B} \cdot G_{a^ba^b}\} \tag{7-72}$$

$$P_{I_{in}}/\mathrm{Hz} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\{A_{12}^B \cdot G_{a^ba^t} - A_a^{2B} \cdot G_{a^ta^t}\} \tag{7-73}$$

式中:$G_{a^ta^t}$、$G_{a^ba^b}$、$G_{a^ba^t}$分别为隔振器输入、输出端加速度的自谱和互谱密度(a^2/Hz)。

因此,只需测得隔振器上、下两端的加速度响应及其点视在质量 A_1^{2B}、A_2^{1B} 和传递视在质量 A_{12}^B,就可得到传递功率流落差。对于

多维系统，可以分别测量各隔振支承的功率流输入和输出，将其相加得到总功率流输入 $P_{I_{in}}$ 和输出 P_{tr}，再由式(7－64)计算功率流落差值。

实测功率流落差 D_P 可以作为功率流传递率 T_{AP} 设计指标的辅助指标，来对系统的隔振效果进行综合评价。由功率流传递率设计指标与传递功率流落差实测指标相结合构成的隔振效果评估体系，较之传统的力传递率与振级落差的结合，要更加科学合理。

参考文献

[1] 宋孔杰. 设备阻抗和支承结构阻抗对隔振效果的影响. 噪声与振动控制. 1984(6):2～7.

[2] Pettersen JWE. Noise Control in Ships. NTNF Report B. 0930. 4502. 1, 1975.

[3] 严济宽，柴敏，陈小琳. 振动隔离效果的评定. 噪声与振动控制，1997(6):22～30.

[4] 安·阿·梏姆席考夫. 船舶总体降噪设计. 1981.

[5] Steenhoek HF. Insertin Loss of Resilient Mounting System in Ships. Proceedings of International Symposium on Shipboard Acoustics, 1976.

[6] 王家林，朱石坚. 振级落差和插入损失对应关系的研究. 海军工程学院学报，1999(2):37～39.

[7] 李世煌，吴桐林. 水泵设计教程. 北京：机械工业出版社，1990.

[8] Goyder HG and White RG. Vibrational Power Flow from Machines into Built－up Structure, Part Ⅰ: Introduction and Approximate Analyses of Beam and Plate－like Foundations. Journal of Sound and Vibration, 1980, 68(1):59～75.

[9] Goyder HG and White RG. Vibrational Power Flow from Machines into Built－up Structure, Part Ⅱ: Wave Propagation and Power Flow in Beam－Stiffened Plates. Journal of Sound and Vibration, 1980, 68(1):77～96.

[10] Goyder HG and White RG. Vibrational Power Flow from Machines into Built－up Structure, Part Ⅲ: Power Flow Through Isolator Systems. Journal of Sound and Vibration, 1980, 68(1):97～117.

[11] 霍睿. 隔振系统效果预测与评估研究：[博士后研究报告]. 武汉海军工程大学，2001.

[12] 朱石坚，何琳. 船舶减振降噪技术与工程设计. 北京：科学出版社，2002.

[13] 严济宽. 振动功率流的一般表达式及其测量方法. 噪声与振动控制. 1987(1):24～29.

第8章　隔振系统设计准则

在工程中隔振效果不太理想的主要原因通常是对不同机器或设备的隔振目的和设计准则缺乏了解。由于不同物体对隔振的要求不尽相同，因此要设计一个最优的隔振系统是相当困难的。此外，被隔振设备的工作区和内部结构或工作环境的变化都增加了隔振系统设计的难度。前者如机床的切割区、车床和坐标测量仪上工作台或起重台位置的变化、发动机和马达运转速度的变化以及因此引起的激励频率的变化等，后者如地面和其它支承结构的动态特性的变化、在被隔振物体的附近存在产生振动或对振动敏感的设备等。通常容易达到某些特定物体对隔振的要求，但要对每种典型设备（如生产设备和测量设备）提出某种最优的、通用的隔振方法是不切实际的。解决这一问题比较合适的方法是根据隔振要求对物体进行分类，然后或多或少地给出对各类物体进行隔振设计时需要遵循的一般准则。

通常可以将被隔振物体分为如下四类[1]。

1. 对振动敏感的机器和设备

这类物体隔振的主要目的是保证在给定外部激励（在某些情况下也可以是内部激励）时，“工作”区或其它关键区域（如精密制造设备中工件和工具之间、或者电子设备中各元件之间）的相对振动不超过允许的极限值。这类设备的典型代表有精密机床、坐标测量仪、光刻机和电子设备。

2. 本身为振源的机器和设备

对这类物体而言，隔振的主要目的是将传递到支承结构（如基础、地面等）的动态作用力降低到允许值以下。典型的代表有：锻锤、冲压机以及其它产生冲击的设备；带不平衡转子的设备（如

风扇和压缩机);振动频谱成分非常丰富的机器(如往复式机器、激振器)等。

3. 通用机器和设备

这类设备既不对外部激励敏感,也不产生过大的激励力(如普通精度的机床)。其隔振的主要目的是:保护其免受突然产生的剧烈外部冲击和振动的破坏;保护外部环境(如相邻的精密设备)不受其偶然产生的干扰破坏(如自激颤振或者黏滑振动);减小噪声级和总振动级(包括内部和外部的振动与噪声);使物体便于安装,即无须采用紧固件或水泥浇注便可固定在地面上。

4. 安装在非刚性结构上的物体(通常为机器和设备)

这些物体包括一些安装在高层建筑、船舶、汽车上的机器。在这种情况下,由于承载结构的动刚度小,设备内(外)的动态激励都有可能被放大。因此,即使是普通的机器都能够使地面或其它支承结构产生剧烈的振动,这种强烈的振动反过来又对精密设备、通用机器设备产生严重的影响。

除了以上这些类型的物体外,还有一些需要满足特殊要求的被隔振物体,如安装在汽车上的发动机等。

值得注意的是,在所有的隔振应用中,绝不能由于静态不稳定、被隔振物体的摇摆振动或结构刚度不足等原因影响被隔振设备的正常工作性能。

当然,前面的分类并不是绝对的。如平面磨床、坐标测量仪、光刻机等都是精密仪器,它们需要可靠的振动防护。然而,当这些设备中的重型工作台或起重台在进行起/停、转向等操作时,会产生强烈的动态载荷,这不仅将对设备本身造成干扰,还会影响附近的精密设备。因此这类设备也必须当作本身为振源的物体来处理。

8.1 振动敏感物体的隔振

由于对设备和仪器零件的加工和测量误差要求越来越严格,从面需要开发更精密的机床和测量仪器。现在,产品的配合公差

和形位公差以及测量仪器的测量误差的数量级通常都为几分之一微米或纳米级。从第二次世界大战起，人们普遍接受这样一个事实，即当精密设备和仪器受到的外部振动激励的幅值大大地超过加工（或测量）误差的容许值时，必须隔离外部振动。科研人员已经研究出了大量的被动隔振装置和其它隔振手段，并成功地将其投入到商业运营中[2,3]。近来，主动控制方法也被引入到了隔振之中，这补充和完善了隔振方法。相比之下，主动控制隔振器能够提供更好的振动防护并使安装在柔性隔振装置上的设备不受其质量分布的影响而保持恒定的高度[3]。由于使用刚度较小（自然频率较低）的隔振装置能够提高隔振效果，因而在安装过程中通常使用非常软的座架。然而，这种安装方式将导致被隔振物体发生较大的倾斜、产生大幅度的摇摆振动并降低其有效刚度。倾斜是指被隔振系统由于零件的增加、减少或者由于系统中的大型部件运动而使质量分布发生变化时，放置在被隔振系统上的水平仪的指示发生了变化。

被隔振物体发生摇摆振动的主要原因可能是外部激励（与其它设备的接触、气流等）或者内部激励（物体内部运动部件加速或减速所产生的力）作用。显然，摇摆振动是有害的，因为它不仅使操作人员烦躁不安，而且还使系统工作区域诱发变形（如影响切割面积和测量面积），其大小甚至可以大于由外界激励引起的、需要通过隔振来减小的振动位移。通过如下方法能够减小这些静态和动态变形以及缓解有效刚度的恶化：首先将被隔振物体固定在一个大型的或刚性支承结构（惯性块）上，然后再安装在隔振器上；或者采用合适的主动控制（伺服控制）系统；或者采用能够实现运动转换的隔振系统（见 5.2.4 节）。但是，前面两种方法将大大增加被隔振物体的费用和尺寸，而第三种方法的隔振效果有限。此外，惯性块削弱了被隔振物体的灵活性，而复杂昂贵的电子或气动主动控制系统则降低了隔振系统的可靠性。

然而，在许多情况下，高精密设备的隔振标准通常没有所假设的那样严格，主要原因是精密设备对外部振动的敏感性并不随着

精度的增加而增加。在设备精度提高的同时,其设计方法通常更可靠。在正确理解外部振动如何影响物体的工作性能,以及更深入地理解了隔振系统的动态特性后,可以使隔振效果避免受到静态或者动态变形的影响。这里将通过对几类精密设备提出特定的隔振要求来说明上述观点。

8.1.1 周围环境的振动

容易对振动敏感设备造成不良影响的外界振动可以通过支承结构或空气传播。隔振的目的是要减少地面振动通过这些支承结构向设备传递。地面产生振动的原因有:附近的加工设备、马达、变压器等的振动(例如,由于不平衡转子的高速运转或车床在切割金属时的颤振);火车、汽车、推车、小机车、起重机等的运动;冲击设备产生的冲击(如锻锤和冲压机,它们需要远离振动敏感精密设备进行安装);具有转动质量的机器的振动(如平面磨床);材料搬运过程中突然产生的冲击;非刚性地面上脚步引起的振动等。在许多情况下,精密设备的振动是由与之相连的辅助设备的激励产生的,例如,机床上的液压泵、一些高科技产品和测量设备上的真空泵等。对于超精密设备,地面的微弱振动也需要考虑。一些不常见但极具危害的振源包括:军事演习或施工中的爆炸、超声速飞机产生的“音爆”、低空飞行的飞机激起的结构振动等。地面振动的特点和振级不仅依赖于激励的大小,还取决于由土壤、基础、地板和建筑物其它结构部件所组成的动力系统对振动的滤波效果。建筑物基础的自然频率(通常大于10Hz)和土壤的特性有关。地面在垂向的自然频率通常为(6~30)Hz,而水平方向上的更高些。

地面振动通常由许多频谱成分组成,它们的大小是随机变化的。在(安装机器的)厂房地面不同位置采集数据后,应用统计分析方法可知地面振动是一个非平稳、非各态历经的随机过程,因此很难用精确的解析方法来研究这种振动过程。隔振器供应商或技术顾问在对地面振动情况进行研究时,通常没有正确理解这一现

象或干脆忽略了这一现象。此时，如果直接应用快速傅里叶变换(FFT)进行频谱分析，将得到错误的结果，并混淆稳态或准稳态振动与幅值快速变化的瞬态振动之间的重要差别。

有些 FFT 分析仪可以得到所谓的“百分位频谱”[4]。应用计算机对 FFT 分析仪的输出进行后处理也能得到这种频谱。百分位频谱 L_n 是指超出测量周期 $n\%$ 的频谱值的包络。图 8－1 给出了一个微电子产品生产车间二楼地面垂直振动的 L_1、L_{10}、L_{50}、L_{90} 频谱(1/3 倍频程)[4]。在 45min 内，并联滤波器的采样间隔为 1s。在 25Hz 频段内频谱出现峰值的原因主要是由于地面的垂向自然频率为 25Hz，面 8Hz 频段内出现峰值的原因主要是由于空调以 500r/min 的速度运转。从图中可以清楚地看出，持续时间为 1% 的地面振动对振动敏感设备的影响比持续时间为 90% 的地面振动要小得多。因此，根据实际情况对地面振动进行统计研究时，可以选用 L_{50} 或者 L_{90}。遗憾的是，通常情况下得不到类似于如图 8－1 所示的高质量数据。

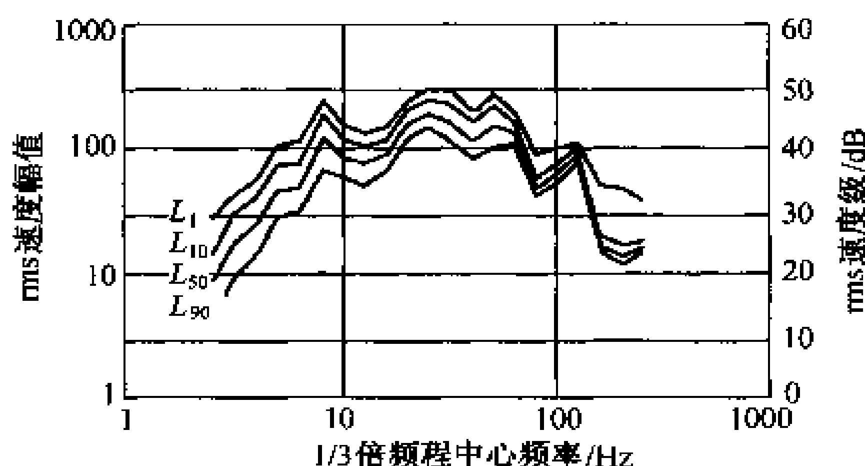


图 8－1 随机分布的振动幅值

(在微电子产品制造厂二楼地面测得的数据)

图 8－2 是在不同工厂测得的准稳态地面产生的垂向(a)和水平(b)振动的幅值图[5]。当振动的稳定时间达到主谐波分量周期的(3～5)倍时，画出代表不同频率处最大绝对振幅的点，然后

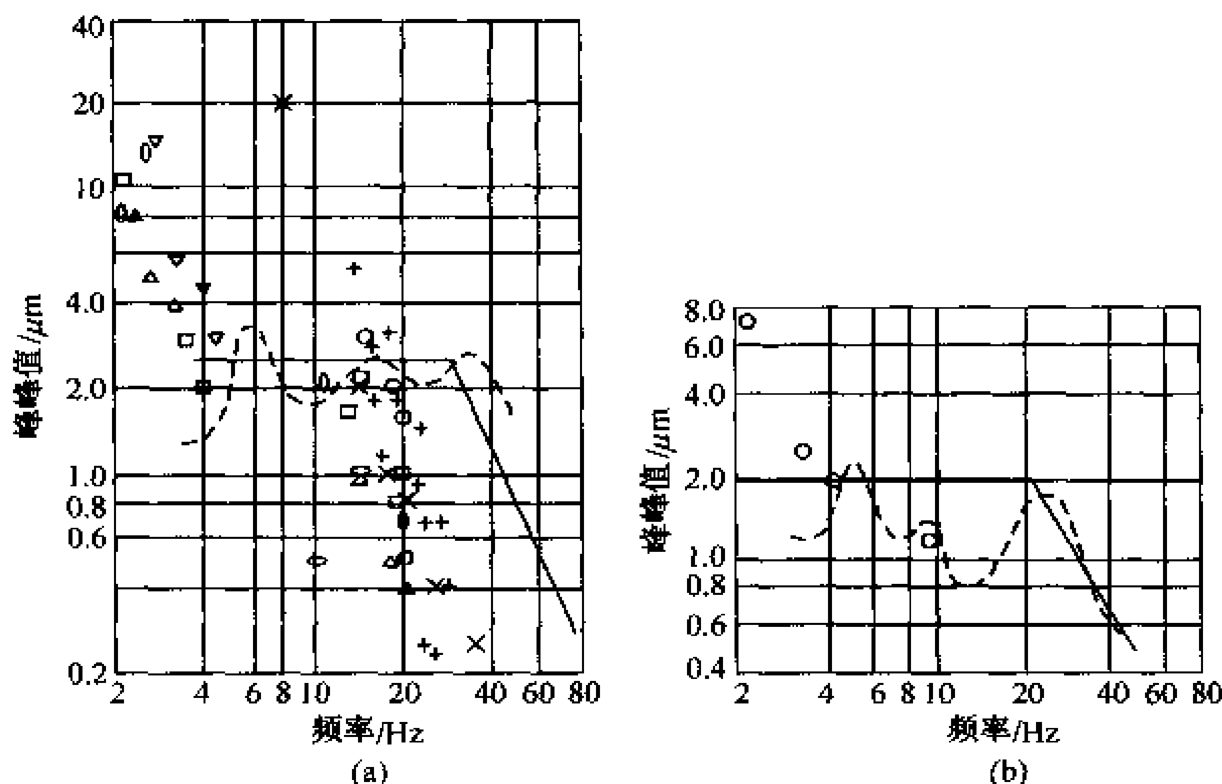


图 8－2　工厂地面产生准稳态振动时的最大幅值

(a) 垂向振动；(b) 水平振动（虚线表示苏联测量的数据的包络，实线表示假定的边界，不同的标记对应于美国不同的地方）。

作出这些点的包络线，就得出了图中所示的虚线。图中的实线是推导过程中所假设的边界。

这些曲线是 20 世纪 60 年代在苏联测得的地面（实心基础板）振动。上层地面是由薄的预制板组成，其振幅比下层地面大(1.5～3.0)倍，相应的频率范围也更宽，而图 8－2 中的点表示 20 世纪 90 年代在美国工厂进行振动测量的结果，其频率下限的幅值将溢出显示屏，这主要是由于采用了分析稳态过程的 FFT 分析仪。因此，这些所谓的低频振幅与图 8－3 给出地面瞬时振动的幅值是具有可比性的。频谱中对隔振最具实际意义的频段为(5～40)Hz。从上面的图中可以看出，苏联所测的地面振动数据对使用了更大功率、更高转速机器的美国工厂而言，提供了非常保守的上限。最近在美国所测的地面产生剧烈振动时的频率上限（约 20Hz）比苏联((30～40)Hz)要低得多。地面垂向振动的位移幅

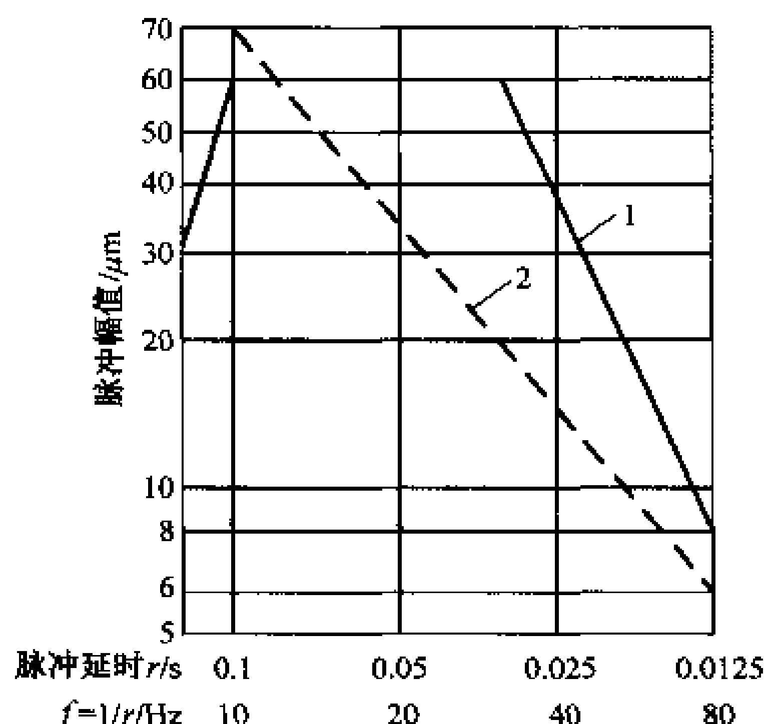


图 8-3　由于冲击导致厂房地面产生的瞬态振动的幅值包络

1—垂向振动；2　水平振动。

值的包络线可以看作是一种窄带((2~20)Hz)噪声。现在对地面振动的测量通常只考虑了垂直方向，而很多精密设备对水平振动更为敏感。图 8-2(b)表明，水平方向的最大振幅比垂直方向的最大振幅(图 8-2(a)所示)小 30%~50%。

8.1.2　振动传递模型

由于地面振动导致了在设备的工作区(如切割、测量区等)或设备的连接处产生相对振动，从面严重地影响了精密加工和测量设备的性能。试验证明，地面振动对机床或者坐标测量仪的影响主要发生在系统的最低阶自然频率处(很少在第二阶自然频率处发生)，这主要是由于在较高自然频率处的振幅不大。此外，隔振装置通常对高频结构振动具有更好的隔离效果。

从地面或支承结构到精密设备工作区之间振动传递的动态特性可近似地由三个互不耦合的双质量系统(具有广义参数)来模拟，如图 8-4 所示。每一个方向的振动都可以用该模型表示，其

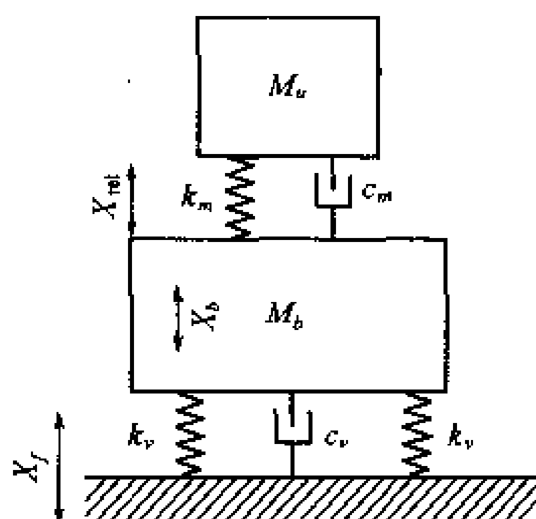


图 8－4 振动敏感设备在某个主轴方向上的两自由度模型

中的质量和弹簧表示设备的广义惯性和刚度。当然，它们在不同的方向上的值是不同的。图 8－4 中 M_b 表示设备座身（或框架）的质量，M_u 表示上层结构的质量（如刀架或测量头等），k_m 和 c_m 表示内部结构部件和连接件的等效质量和阻尼，k_v、c_v 是隔振装置的刚度和阻尼。

建立这种双质量模型后，振动对设备的影响可以通过质量 M_u 和 M_b 之间的相对位移幅值 X_{grel} 与座身 M_b 的位移 X_b 之间的比值来表示［见式(5－11)］

$$\frac{X_{grel}}{X_b}=\frac{\dfrac{f^2}{f_m^2}}{\sqrt{\left[1-\dfrac{f^2}{f_m^2}\right]^2+\dfrac{\delta_m^2}{\pi^2}\dfrac{f^2}{f_m^2}}}=\mu_{rel} \qquad (8-1)$$

式中：f 表示感兴趣的频率；$f_m=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{k_m(M_u+M_b)/M_uM_b}$ 是上层结构子系统的共振频率；δ_m 是上层结构系统的对数衰减率。

设备工作区内的实际相对位移与 X_{grel} 成正比

$$X_{rel}=\gamma X_{grel} \qquad (8-2)$$

比例常数 γ（设计常数）取决于设备的几何特征。例如，对于如图

8-5 所示模型的上层结构，比例常数为

$$\gamma_{xx} = M_u b_1 c / I_{o1} = b_1 c / (\rho_y^2 + b^2 + c^2) \qquad (8-3)$$

$$\gamma_{zz} = M_u cd / I_{o1} = cd / (\rho_y^2 + b^2 + c^2) \qquad (8-4)$$

式中：γ 的第一个下标表示设备座身（或框架）的振动方向，第二个下标表示上层结构相对于座身的运动方向；M_u 仍然表示上层结构的质量；I_{o1} 为上层结构绕实际旋转轴的质量惯性矩；ρ_y 为主轴 y 的惯性半径；图 8-5 中，尺寸 b、b_1、c、d 都是以系统重心 O_1 为起点测得的距离。显然，γ 取决于设备的安装方式，特别是上层结构相对于座身（或框架）的位置。在图 8-5 中，上层结构通过一个弹簧与座身相连，该弹簧只允许产生角位移，并具有无穷大的垂向刚度，这是对大部分机床以及测量系统的良好近似。因为尽管导轨在与运动垂直的方向上具有较大的平动刚度，但角位移非常大[6]。模型在工作区内水平位移对基础垂直振动的敏感性的减小可以通过减小结构（设计）的尺寸 c、b，减小悬突物，或者在结构的背面增加平衡物而实现，而在工作区内垂直位移对座身垂直振动的敏感性可以通过减小（设计）尺寸 c、d 而减小。

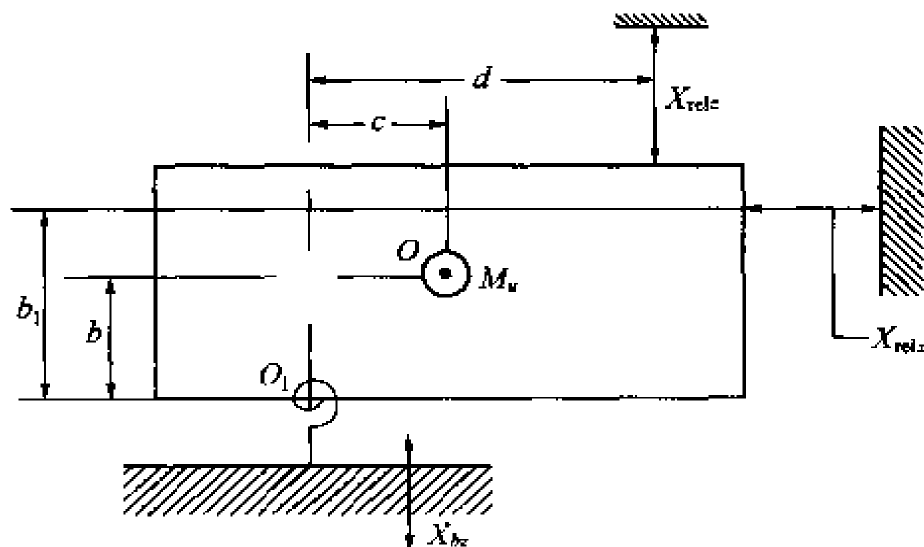


图 8-5 在工作区域内动态模型的设计参数对相对振动的影响

从式（8-1）中得到的广义幅值比（传递率）$X_{grel}/X_b = \mu_{rel}(f)$ 是频率 f 的函数，可用于衡量物体对振动的敏感程度。它不依赖

于物体的安装方式，只取决于隔振系统的设计（结构自然频率 f_m 和质量 M_b、M_u）。为了求出设备在工作区内相对振动的幅值与地面振动幅值之比，X_{grel}/X_b 应该乘以座身振动的幅值与地面振动的幅值之比（即座身/隔振系统的传递率）。假设被隔振物体和隔振系统之间的动态耦合非常弱，那么这些系统可以认为相互独立（见 5.3 节）。这种假设是完全合理的。因为在大多数实际情况中，被隔振基础在三个坐标方向上的自然频率（f_{vx}、f_{vy}、f_{vz}）比结构自然频率 f_m 小很多，座身的质量 M_b 通常远远大于上层结构 M_u 的质量。

8.1.3　隔振设计准则

对高精密或者振动敏感设备隔振的设计准则需要考虑下面三种典型的情况：第一种情况是保护设备中某一特定部件不受地面或其它支承结构稳态振动的影响。由于稳态振动可以表示为离散频谱，所以这种情况本质上就是隔离地面产生的正弦振动。第二种情况是保护设备中特定部件不受来自地面的准稳态振动的影响，如图 8－2 中包络线所包含的振动。虽然图 8－2 中的曲线包含了干扰振动的频率范围，但可能只有一些特定的频率成分具有图中所示的幅值。如果需要综合处理某个被保护设备的部件不受地面振动（振动频谱图如图 8－2(a) 和 (b) 所示）影响的隔振系统时，该部件可与隔振座架一起安装，这将保证在大多数的安装位置都能有效隔振。第三种情况是保护设备不受地面瞬态振动的影响，这种振动主要是由于经常或偶然的冲击激励产生的。

1. 稳态振动的隔离

对于第一种情况（即稳态激励），隔振系统对频率为 f 的地面振动的衰减程度取决于频率比 f/f_v，其中 $f_v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{k_v/(M_b+M_u)}$ 是特定方向上隔振系统的自然频率。对于黏性阻尼和结构（迟滞）阻尼不太大的情况，振动的衰减程度（传递率）分别由式（5－6）和式（5－22）来表示。

因此,对于频率为 f_1 和 f_2 且幅值相同的两个正弦波来说,如果 f_2/f_v 的值较大,那么频率为 f_1 比频率为 f_2 的振动衰减得少。当隔振器中存在黏性阻尼时,根据式(5-6),增加阻尼(这种方法减小了共振峰的值,即降低了设备对小幅值"背景噪声"的敏感性并减小它在偶然冲击以及在启动/停止过程中设备的偏移量)将减少对高频振动的隔离。对结构阻尼而言,根据式(5-22),增加阻尼对隔振效果的影响不大。

2. 准稳态振动的隔离

对于第二种情况(即组合型准稳态激励),隔振的原则要保证精密物体不受地面振动的影响,如图 8-6 所示。其中,图 8-6(d)表示在给定方向上,地面位移幅值 X_f 的频谱图。从图 8-2 可知,在特定方向上,图 8-6(d)中的实线为一条包络线,幅值为 a_0。图 8-2(a)中的低频("上升")部分是由测量误差引起的,它不能够表示实际的振动环境,因面可以被忽略。图 8-6(a)表示物体关键(工作)区域产生的相对运动,Δ_0 表示这种运动的容许范围(通常独立于频率,但取决于物体的精度)。对精密机床,或者对用于生产电子产品的精密测量设备和加工设备而言,机械结构和隔振系统之间的动态耦合相对较弱(见前面的讨论和 5.3 节)。因此,相对运动幅值和频率特性之间的近似关系可以将 X_{rel}/X_b、X_b/X_f 和 X_f 相乘得到,隔振指标可以表示为

$$a_0 \frac{X_b}{X_f} \frac{X_{rel}}{X_b} < \Delta_0 \quad a_0 \frac{X_b}{X_f} \mu(f) < \Delta_0 \qquad (8-5)$$

图 8-6 中的实线 a 对应于刚性座架;虚线 b 对应于较软的隔振系统,它和刚性座架具有相同的阻尼;点线 c 对应于阻尼增加了的较软的隔振系统。左边一组图对应于具有粘性阻尼的隔振器,当激励频率大于 $\sqrt{2}f_n$ 时,阻尼越大振动传递率越小。右边一组图对应于具有迟滞阻尼的隔振器,它对高频振动向工作区的传递没有较大的影响。显然,阻尼大、刚度小的隔振器能显著减小被隔振物体工作区内的相对振动。必须注意,如果所选择的隔振器在共

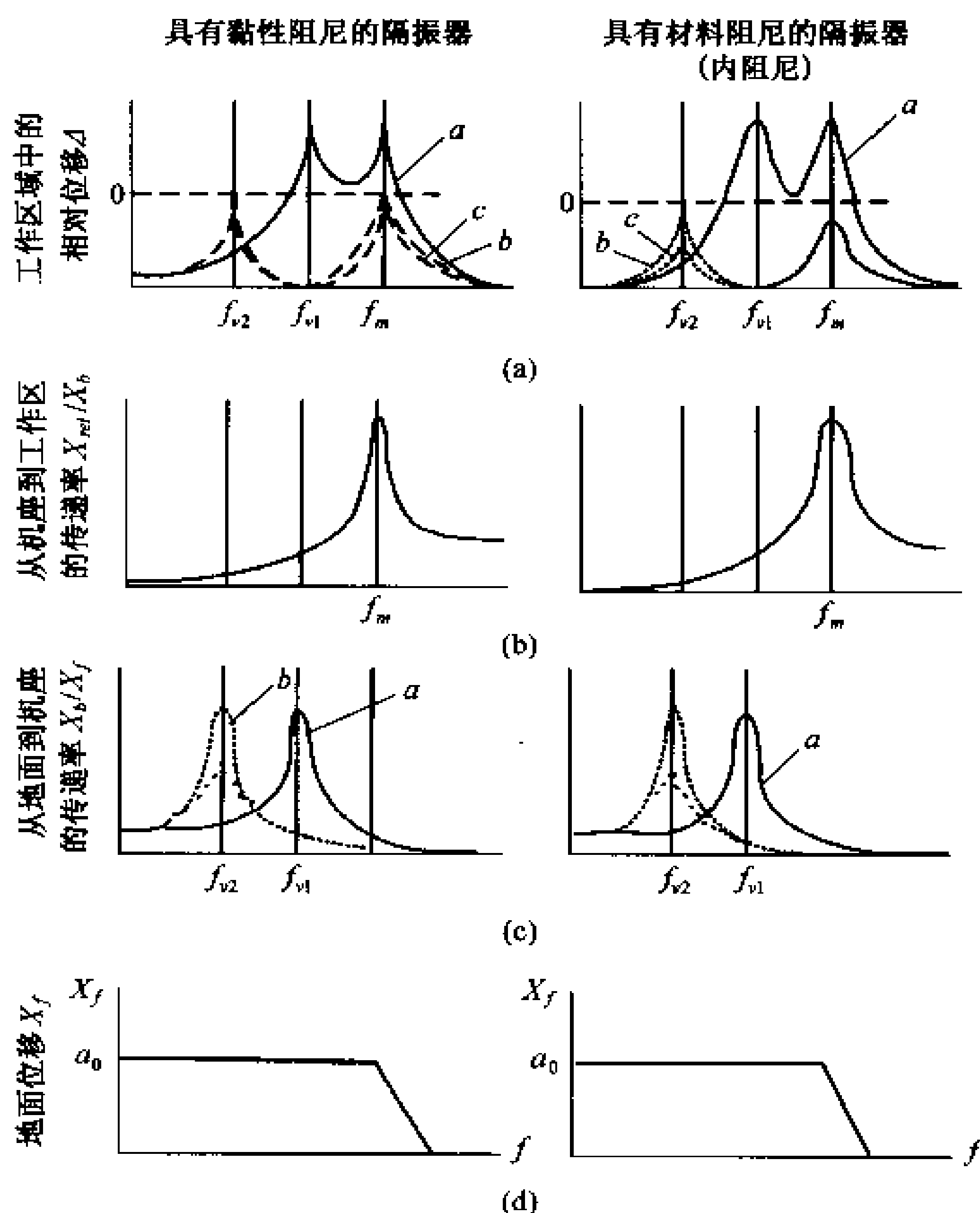


图 8－6　宽频激励的隔离

振时相对振幅 X_{rel} 没有超过容许振级 Δ_0 时，允许该共振发生。相应地，可以通过减小 f_v 或者增加阻尼 δ_v 来提高隔振效果。虽然在结构自然频率 f_m 处的相对位移 X_{rel} 随着隔振器阻尼的增加而增加，但在更高频率时，通过减小地面振动的幅值，并将具有迟滞阻尼的隔振系统的传递率曲线降低，可使得 f_m 处发生的共振没有 f_v 处的共振危险。

采用如图 8－6 所示的地面振动的广义频谱比采用实际测量

(在设备安装位置)的频谱更保守。当原来的设备被重新布置或者安装新设备以后,后者会发生变化,而图 8-6 中的频谱代表了图 8-2 中进行多次测量后最差的一种情况。

图 8-6 可以表示为解析的形式[5]。如果隔振系统和被隔振物体之间的耦合可以被忽略,那么在关键区域的相对振动表示为

$$X_{rel}(f) = X_f(f) X_b(f)_{X_f = const} X_{rel}(f)_{X_b = const} \quad (8-6)$$

根据式(5-22)求得 $X_b(f)_{X_f = const}$ 为

$$X_b(f)_{X_f = const} = \mu_v = \sqrt{\frac{1 + (\delta_v/\pi)^2}{[1 - (f/f_v)^2]^2 + (\delta_v/\pi)^2}} \quad (8-7)$$

根据式(8-1)和式(8-2)得到

$$\frac{X_{rel}(f)}{X_b} = \gamma \frac{\frac{f^2}{f_m^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{f_m^2}\right)^2 + \frac{\delta_m^2}{\pi} \frac{f^2}{f_m^2}}} = \mu_f \quad (8-8)$$

如果式(8-6)中的所有参数都已知,那么就可以计算出被隔振物体上关键区域的相对振动并与容许幅值 Δ_0 相比较。在式(8-8)中,μ_f 是频率为 f 时,从基础到关键(工作)区域的传递率。显然,如果有 $f \ll f_m$、$f_1 \ll f_m$ 时,则

$$\mu_{f_1} \approx \mu_f (f_1^2/f^2) \quad (8-9)$$

成立。通常由于有 $\delta_v \ll \pi$、$\delta_m \ll \pi$、$f_v \ll f_m$,因此,在隔振系统的共振频率 f_v 处,满足

$$X_{rel}(f_v) \approx X_f \mu_{f_v} (\pi/\delta_v) \quad (8-10)$$

机器结构的动态特性由 μ_f 确定,μ_f 是在某个远小于 f_m 的频率 f 处测得的。由于假设 $f_v \ll f_m$,因此传递率 μ_{f_v} 可以表示为

$$\mu_{f_v} \approx \mu_f (f_v^2/f^2) \quad (8-11)$$

将式(8-11)代入式(8-10),在频率 f_v 处(危害最大的情况),工

作区内的相对振动幅值可以表示为

$$X_{rel}(f_v) \approx X_f\mu_f(f_v^2/f^2)(\pi/\delta_v) \tag{8-12}$$

如果工作区内所容许的相对振幅 Δ_0 给定，且

$$X_{rel}(f_v) < \Delta_0 \tag{8-13}$$

那么隔振是有效的。将式(8－12)代入式(8－13)后，重新表示为如下不等式

$$\Phi_p^2 = f_v^2/\delta_v < \frac{\Delta_0 f^2}{\pi X_f \mu_f} \tag{8-14}$$

式中

$$\Phi_p = \frac{f_v}{\sqrt{\delta_v}} = \frac{\sqrt{\dfrac{k_v}{M_b + M_u}}}{\delta_v} \tag{8-15}$$

是精密设备和其它振动敏感物体的隔振指标。Φ_p 应能完全取代自然频率作为判断隔振性能好坏的指标。它表明基于上面的假设，隔振效果可以通过减小自然频率 f_v 或者增加隔振系统阻尼 δ 来提高。隔振系统每一坐标方向的隔振效果都可以用该指标进行判断。Φ_p 的有效性可以通过试验数据来证实。

该标准对隔振器弹性材料的选择也是非常有用的。这些材料的刚度和阻尼通常依赖于振动的幅值 a 和频率 f。刚度可以表示为

$$k = K_{dyn}(a,f)k_{st} \tag{8-16}$$

式中：k_{st} 为隔振器的静刚度系数，K_{dyn} 是动刚度系数。将式(8－16)代入式(8－15)可得

$$\Phi_p = \sqrt{\frac{k_{st}}{M_b + M_u}}\sqrt{\frac{K_{dyn}(a,f)}{\delta_v(a,f)}} \tag{8-17}$$

显然，从式(8－17)可以看出，对于给定的 Φ_p，可以通过减小 $K_{dyn}/$

δ_v 来增加隔振器的静刚度 k_{st}。由于 K_{dyn} 和 δ_v 取决于频率，特别是振幅，所以对不同的材料和不同的振动参数而言，它们之间的比值也是不同的。文献[1]给出了不同振幅下测得的某些材料的 K_{dyn}/δ_v 比。所以，环境振动幅值较低的情况下，隔振器材料的选择应和大幅值振动条件下不同。

式(8－14)、式(8－15)适用于如图8－2所示的一般环境振动，它们可以描述为窄带等强度随机振动的位移。对坐标测量仪(CMM)的隔振问题需要进行特殊地说明。许多CMM设备对摇振振动非常敏感。相应地，对这种设备进行安装需要采用角刚度较大的隔振器。

3. 冲击隔离

第三种情况是隔离地面或支承结构的短时运动(碰撞或者冲击)。因为这种激励的持续时间非常短，所以不那么让人讨厌。地面冲击产生的相对位移峰值的容许值 Δ_{op} 可近似地取为稳态振动时 Δ_o 的3倍。对受到冲击激励的物体进行隔振，可以考虑采用5.6节中的改进型冲击谱法进行分析，从而可以得到

$$\Delta_p = A_{rel} a_b \gamma = A_1 A_{rel} \gamma a_f \qquad (8-18)$$

式中：a_b 表示地面冲击位移幅值为 a_f 时基础产生的位移峰值，A_1 表示与图5－36(c)中作用在隔振系统上的正矢脉冲对应的冲击谱值，A_{rel} 表示在基础正矢脉冲作用下工作区产生的相对位移的冲击谱值(图5－37)。

如果 γ、Δ_{op}、脉冲的幅值 a_f 和延迟时间 τ_f 已知(如图8－3所示)，那么隔振系统的自然频率值(它对设计有效的隔离系统是必需的)可以通过对前面的表达式加以修正得到。根据这种方法得到的一些精密机床在 z 方向上的 f_{vp} 值非常接近于自然频率 f_v。根据隔振指标 Φ_{pz} 和 $\delta_v=0.5$ 可知，f_v 对有效隔离垂直方向的稳态振动是非常关键的。由于这种关系对各种机床(它们具有不同的、多种式样的结构)都是成立的，所以当地面脉冲激励如图8－3所示时，上述结论可以推广到其它对振动敏感的设备。然而，现代的

超精密设备总是安装在远离产生强脉冲的地方，而且，由于那些用来安装高精度设备的厂房设施受到了适当的控制，厂房地面将不会产生如图 8－3 所示的位移幅值为(30～60)μm 的振动。研究表明(见 5.6 节，图 5－37)，隔振器的阻尼对冲击传递的影响比对稳态振动传递的影响要小。因此，对于隔离稳态激励，阻尼增加的同时允许采用刚度更大的隔振器，这通常是很重要的。然而，当地面的冲击激励非常严重时，不能使用刚度较大的隔振器，即使它们具有很大的阻尼。

8.1.4 精密设备隔振中的附加问题

使用被动隔振器进行隔振会减小被隔振设备和刚性支承结构(基础)的连接刚度。如果被隔振物体中包含了运动部件(例如，平面磨床的工作台、坐标测量仪上的起重架、光刻机中的台架等)，将导致平动、特别是极具危害性的摇振振动的产生。这些运动是由于设备中重型部件加速(减速)过程中产生的惯性力以及作用在驱动马达上的反作用力造成的。

将机器或设备安装在刚度较小的隔振器上时，也有可能降低没有和刚性基础相连接的设备框架的有效刚度。

这些问题对安装在弹性支承上的所有设备都非常重要，特别是对振动敏感的精密设备。研究表明，精密光学设备中最强烈的振动激励是由“镜台机械”产生的，该部件主要用来在 X、Y 方向对目标进行定位[7]。虽然可以等振幅完全衰减后再正式进行成像，但确定镜台运动停止与正式开始成像之间需要多长时间是非常重要的。

1. 由内部动态力产生的振动的隔离

对某些被隔振的精密设备来说，如果在下一次操作(例如，平面磨床的下一次磨削；坐标测量仪进行下一次测量；光刻机下一次曝光；用显微镜进行下一次观察)前没有消除其摇摆或直线运动，那么将产生非常有害的影响。虽然这些振动通常是低频的，但其强度很大，因面导致在工作区内产生过大的位移。两种典型的情

况是：① 重型部件的运动（例如在平面磨床中）；② 较小的元件以较大的加速度运动（如光刻机中的硅片台和标线台）。

在情况①中，摇摆振动可以通过将机器刚性地安装在重型基础块上，并将隔振器置于这些基础块之下来减小振动。但这种方法在安装，特别是在重新安装过程中费用高、耗时长。如果振动最敏感的方向和内部激励力方向垂直时，采用一个具有最优刚度比的各向异性隔振器具有良好的效果[1]。在内部激励方向采用刚度较大的隔振器，可以减少摇摆振动的幅值并增加振动的频率。频率的增加将导致摇摆振动以更快的速度衰减。减小摇摆振动的另一个有效的方法是增加隔振器的阻尼，特别是增加摇摆振动方向上的阻尼，从而缩短系统达到稳定状态所需的时间。第三种方法是在内部激励方向上增加隔振器之间的距离，这样增加了系统的角刚度。角运动分量（与大幅度运动相关）的减少与水平运动分量的增加，可以显著地减小被隔振物体的偏移量。为增大两个隔振器之间的距离，可以在被隔振物体的框架下而安装金属板，然后再在金属板下而安装隔振器。金属板的厚度通常为(25～100) mm，从而提高精密机床和其它精密设备框架的刚度。在金属板上确定用于减少摇摆振动的安装孔的位置是非常容易的。与此类似的是，可以通过采用具有较大角刚度的隔振器来增加隔振系统的有效角刚度。虽然传统隔振器的角刚度非常小，但通过合理地设计弹性元件可以满足所要求的特性，如采用橡胶金属层压板。尽管将隔振器布置在包含了被隔振体重心的平面内可以实现完全解耦，但这种布置方式只适用于隔振系统被安装在重型惯性块上的情况。然而，通过提高隔振器的安装平而，从而减小它到重心平而之间的距离是非常有效的方法。因为这将减小系统中平动方向和转动方向之间的耦合，并增加平动分量。该方法所付出的代价是在摇摆运动中增加了更有害的角运动分量。

为了减小情况②中所产生的内部动态力的影响，上而所有的方法都可以用来彻底减少工作区内由驱动马达的反作用力以及运动平台的速度或加速度产生的扰动。此外，有两种结构设计方法

应用比较广泛。第一种方法是引入一种承载驱动马达的所谓“作用力”或“反作用力”框架，如图 8－7 所示[8]。作用力框架与地面上的支承结构（图 8－7 中的支承架）刚性连接，而测量台架（图 8－7 中对振动相当敏感的硅片台和光刻台）与反作用力框架隔开以保护其不受外部振动的影响。当硅片台或光刻台由面定在反作用力框架上马达的驱动下加速（减速）时，马达产生的反作用力对框架和地面产生激励，而微电子设备厂房的地面具有非常大的刚度[9]，所以地面振动幅值相对很小。地面（支承架）的振动由测量台架下的隔振器进行衰减，因此不会降低测量台架的工作性能。由于支承硅片台和光刻台的元件（空气轴承）只有很小的摩擦，所以它们在加速过程中不会使测量台架产生振动。这种装置的缺点是结构比较复杂。图 8－8 为另外一种设计方法[8]。其中，相对较重的承载光刻台框架由 y 方向的大功率长行程（LoS）作动器驱动，由较小的慢速短行程作动器在 6 个运动方向上进行精确定位，并采用了两个平衡砝码（平衡质量）来防止由 LoS 作动器导致机器重心位置发生变化而产生倾斜。平衡砝码能够产生与重心变化方向相反大小相等的作用力，因而减小其不利影响。

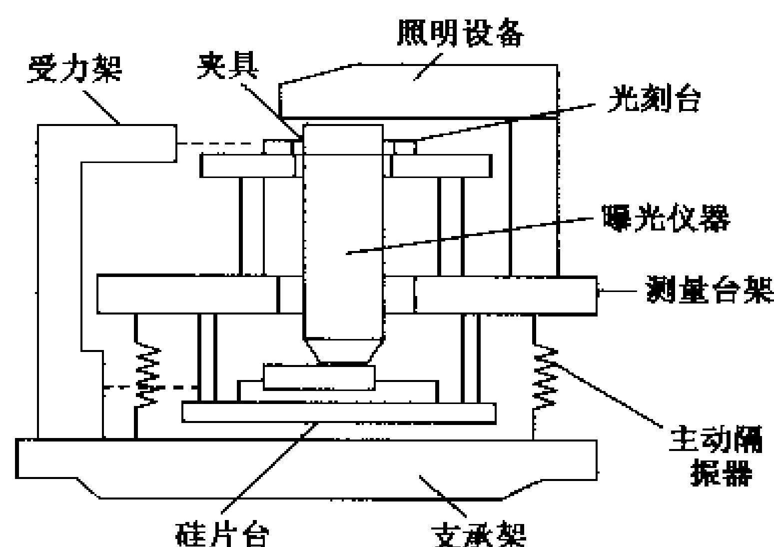


图 8－7 ASML PAS 5500 型光刻机结构

（作动器的反作用力传递到受力架）

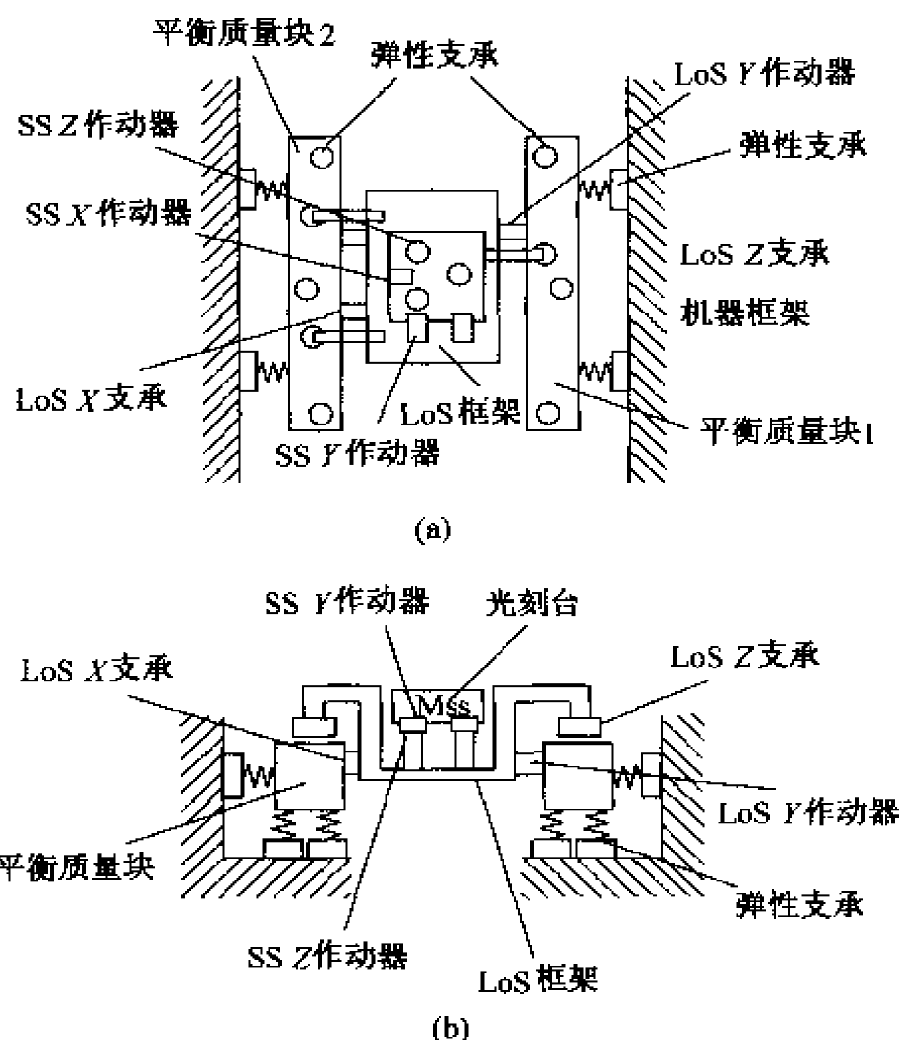


图 8－8　精密光刻机的稳定工作台

2. 隔振对被隔振体有效刚度的影响

支承元件的刚度、数量和位置对被隔振设备的变形(或刚度)有很大的影响。甚至是一个非常脆小的结构,如果被合理地支承,它也可能具有一定的有效刚度。小型精密设备通常不需要附加基座来增大其框架结构的刚度,而大型设备(超过 10t 的机床等)通常需要采取这种措施,除非它们经过特殊地设计后被安装在 3 个支承点上(运动学安装)[6]。必须注意,小型设备的自然频率比类似的但尺寸较大的设备的自然频率高,且与尺度因子 $1/L$ 成正比,L 是线性参考尺寸。在许多情况下,特别是对中等质量((50 ~ 10)t)的机器而言,合理地布置隔振装置可以减小框架的静态变形,因而可以使它们看起来好像具有更大的刚度。

对支承位置进行优化的原则之一是平衡系统中的变形，使得不同关键点处的最大变形量几乎相同。对于简支梁（可以当作实际结构的简单模型）而言，通过将支承点布置在所谓的 Bessel 点后，就可以达到很好的平衡效果。这种方法如图 8－9 所示，图中梁上承载了均匀分布的载荷（例如重量）。将图 8－9（a）中的支承改为两端嵌入安装后，可以使最大变形减小 5 倍。然而，如果将支承布置在 Bessel 点，即离梁端点 $0.23L$（$L/l = 1.86$）处，可以使最大变形减小 48 倍（图 8－9（c））。与图 8－9（a）（b）中只有一个最大变形点的情况不同，图 8－9（c）中有 3 个最大变形点，它们分别是两个端点和一个中点。显然，如果在图 8－9 中采用柔性支承而不采用刚性支承，也会出现相似的情况。由于图 8－9（c）中产生变形的趋势减小，所以由支承柔度产生的影响也将减小。在支承更复杂的结构如板或复杂框架时，可以应用类似的方法[6]。

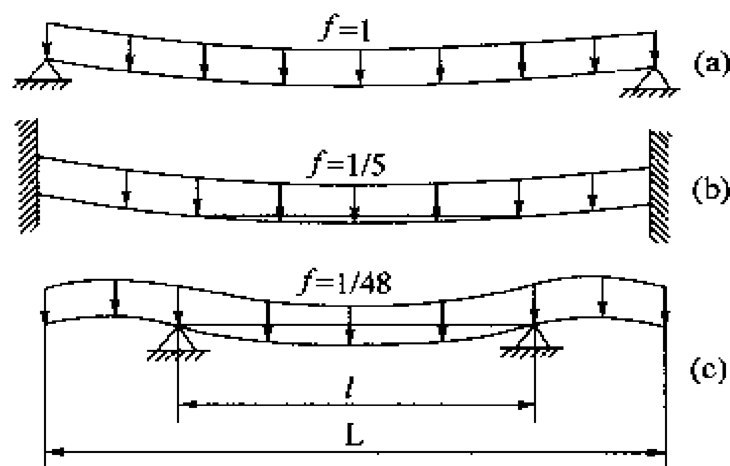


图 8－9　双支承梁结构中支承点的位置和支承类型对梁最大变形的影响

座架（隔振器）的位置和数量对结构部件之间（如磨床中砂轮和被加工零件之间）的相对变形的影响主要是由于它改变了座架作用在结构上的力。这些反作用力使结构的变形模式发生了改变。对座架反作用力导致的两种变形进行区别是非常重要的。在第一种情况中，被支承结构为单一整体或单元，其质量分布不随时间发生很大的改变。在第二种情况中，结构被安装在支承元件/座

架上后，质量分布发生改变。相应的例子有：用于加工不同工件的机床，或者一些本身具有大型运动部件（如支柱、工作台、连杆等）的设备。

对 Bessel 点进行定位取决于结构的载荷分布以及变形参数（斜率和挠度）。图 8－10(a) 表示一根受到均匀分布载荷 Q 作用的简支梁（与图 8－9(c) 相似）。图 8－10(b) 表示一根受到集中

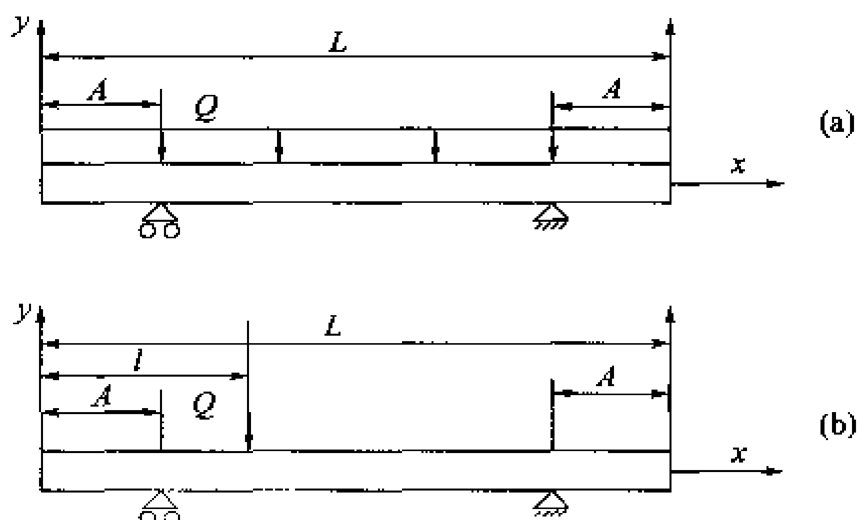


图 8－10　具有不同载荷条件的支承梁

（移动）载荷 P 作用的简支梁。对图 8－10(a) 而言，梁在两个支架之间（$x=L/3$）和支架外（$x=0$、$x=L$）产生的最大斜率为

$$|y'_{x=0}| = |y'_{x=L/3}| = 0.001543\frac{QL^3}{EI} \quad (A = 0.222L) \tag{8-19}$$

最大挠度（在 $x=0$ 和 $x=L/2$）为

$$y_{x=0} = y_{x=L/2} = 0.0002698\frac{QL^4}{EI} \quad (A = 0.223L) \tag{8-20}$$

类似地，对于图 8－10(b)，当 $l=L/2$ 时，有

$$y'_{x=0} = y'_{x=0.441L} = 0.03727\frac{PL^2}{EI} \quad (A = 0.119L) \tag{8-21}$$

$$|y_{x=0}| = |y_{x=L/2}| = 0.006811\frac{PL^3}{EI} \quad (A = 0.156L) \tag{8-22}$$

虽然最优支承点只是在距离梁的端点 0.119L ~ 0.223L 之间变化，但支承位置的布置是非常重要的。如果在所有的情况中，支承位置都布置在平均位置 0.18L 处，而不是布置在各自的最优位置，那么最大斜率将增加 160%，最大挠度将增加 280%。

图 8－11 为立柱镗床支承位置的优化图。立柱的重量 W_c = 42500N 由 $P_1 = P_2$ = 21250N 来表示，它们被依次布置在机座的两个位置上，即在立柱额定行程的端点。镗床的自重被对称布置在平直导轨和 V 形导轨之间，因此可以保证基座的变形是严格的弯曲变形（而非扭转），其挠度的大小可以通过分辨力为 0.5μm 的标尺相对于参考基础（没有表示出来）测量得出。优化过程是每次将支承点 B 的位置移动 150mm。当支承位置从初始位置移动 150mm 后［如图 8－11（b）所示］，支承点之间最大的挠度减小 4μm（15%），当移动 300mm 时［如图 8－11（c）所示］，最大挠度减少 10μm（40%）。进一步移动支承位置时［如图 8－11（d）所示］，导致基座（在 C 点）向上的变形显著增加。因此，图 8－11（c）中的支承位置最优。

当结构框架经过加工后，可以通过座架安装在刚性（平板）支承结构上。如果座架的数目为 3（运动学支承），那么，它们产生的反作用力不依赖于座架高度和刚度的变化，而且不受支承面几何尺寸变化影响。

这种结构安装在隔振器上时与安装在刚性座架上具有相同的有效刚度。其反作用力的大小完全取决于部件/结构重心的位置和座架相对于重心的位置，因而结构中所有部件的相对位置可以被精确地面定。使精密设备框架刚度变大的一个有效方法是将它们和刚性（钢）板或特别设计的加强结构连接在一起，使它们成为一个独立体[6]，从而允许将它们被安装在刚度非常小的隔振器

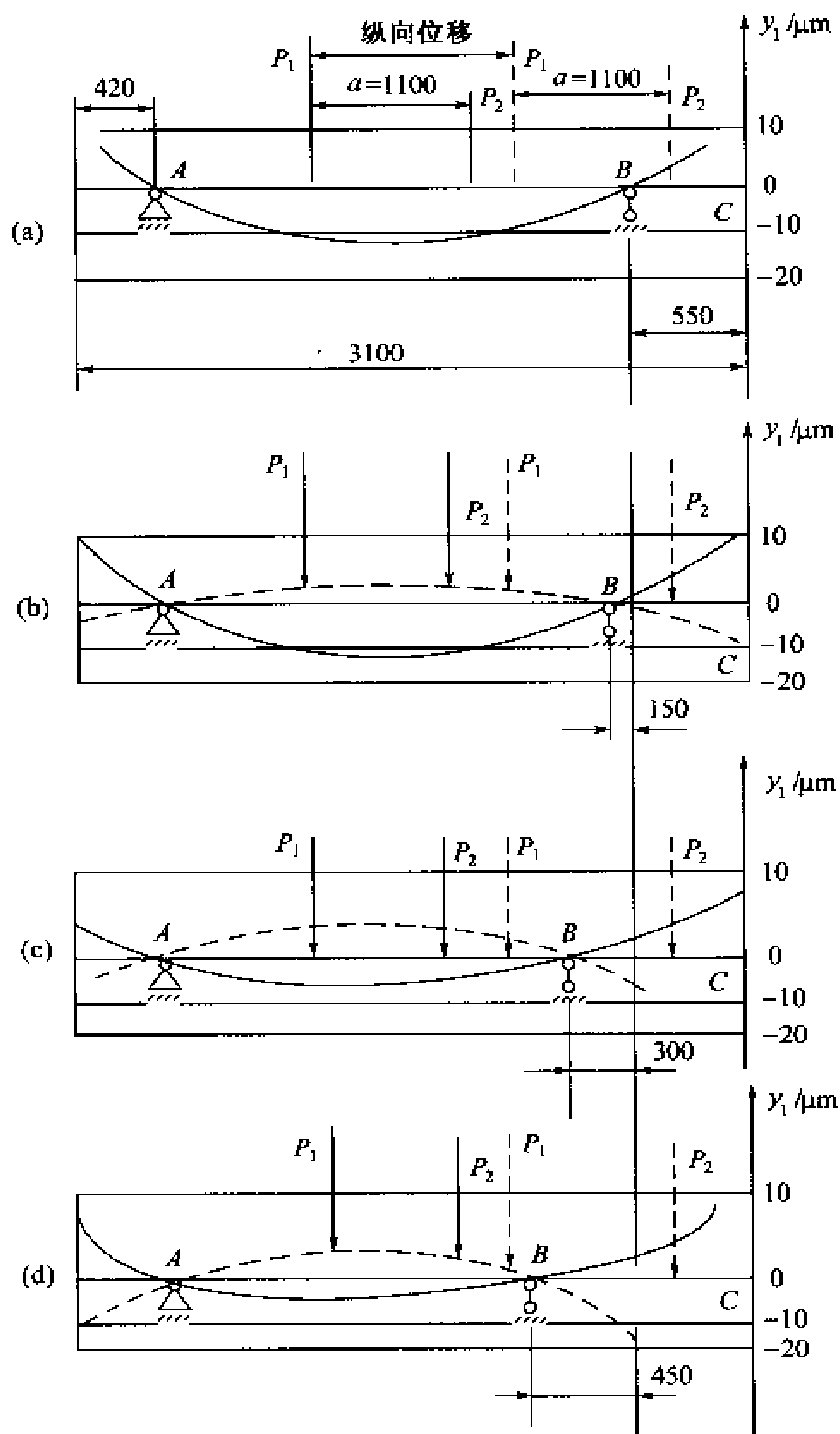


图 8－11　镗床支承位置的优化过程（单位 mm）

上。钢板的厚度通常为(25～100)mm,被隔振体越大需要的钢板越厚。

然而,在更多的情况下设备安装点的数目大于3个,这类系统构成了超静定系统。当它们被重新布置时,尽管没有改变其质量分布,但座架之间反作用力的分布会发生改变。显然,这将导致结构中三维应力—应变图发生变化。反作用力的变化很容易导致作用在结构上的力矩发生变化。如果精加工后的部件被安装在3个以上的座架上并被移动到其它位置(如移动到装配车间)时,或者装配好的机器/仪器被移动到其它位置时,将不可避免地改变其安装条件(反作用力),从而导致结构产生变形。这种变形通常可以通过调整结构的水平度进行校正(调整每个座架的高度,直到结构中指定参考面的变形在可接受范围内为止)。由于座架和支承结构中的反作用力会随时间缓慢变化,因此必须按照上述方法定期对每个重新装配后的部件或组合结构进行调整。应该注意的是,由于调整过程涉及到座架高度的改变,且隔振器的刚度比刚性座架(楔形座架、螺纹安装等)小得多,所以隔振器上的反作用力比刚性座架上的力要稳定得多。此外,隔振器不存在“应变松弛”过程,而“应变松弛”是刚性座架的典型特征。

对于一个尺寸给定的框架,虽然增加座架的数量可以减小座架之间的距离,并使框架的变形量减小(在理论上与l^3成正比),但系统对支承表面微小的几何变形以及安装条件、座架高度的变化更加敏感,特别对于那些刚性座架,情况更是如此。这种变化可以对座架的反作用力产生显著影响。由于随着座架数量的增加,结构的有效刚度变大,所以即使是非常小的偏差也将导致反作用力出现较大的波动(因此产生了变形),相反地,将使一些刚性座架失效。合适地选择座架位置和数量是非常重要的,它既能减小摇摆振动,又能够增加振动敏感设备的有效刚度。因而这个问题特别值得注意,但设计者却通常很少考虑该问题。

8.2 对本身是振源的物体的隔振

这里主要研究如何对产生单频周期激励、多频简谐激励、保守冲击激励(局限于被隔振物体的结构中)和惯性冲击激励的物体进行隔振。

8.2.1 产生单频激励的物体

下面考虑两种隔振安装的情况。第一种情况(单向激励)是隔振器受到单向激励,它主要隔离一个方向的振动。这种情况虽不常见,但非常重要。第二种情况是(多向激励)单频激励可能具有多个坐标分量(如由不平衡转子产生的激励),隔振器必须在多个方向具有相同的刚度。

1. 产生单向激励的物体

这类物体中典型的代表是激振器,它用于对部件和设备进行性能测试(通常情况下是电力驱动)。其主要的特征参数是:在特定频率范围内,作用在用于固定试件的工作台上的简谐(正弦)激励力的最大幅值。因为作用在支承结构(地面)上的反作用力的幅值可能超过额定作用力的大小,因此将对振动敏感设备和工作人员产生严重的危害。虽然大部分测试都采用垂直激励,但激振器在垂直面内可以倾斜,从而改变振动的方向。振动测试也可在特定的幅频范围内采用具有复杂频率分量的振动来进行(包括冲击)。然而,隔振分析通常是对单频激励而言的。

由于激振器的频率范围通常比较宽,而且起始频率低(如 Data Physics S-100 型激振器的频率范围为(2 ~ 7000) Hz),因此激振器一般安装在垂直自然频率低(f_v = (1 ~ 3) Hz)的气动隔振器上,这种隔振器的水平刚度比垂向刚度大(约 2:1)。由于隔振器的垂向自然频率如此小,因此激振器设备好像是处于“漂浮”状态,且其产生的反向运动将从工作台的有益振动中吸收一些能量,这将降低激振器的工作效率。如果激振器不直接安装在隔振器

上，而是先和一个惯性块相连接再进行安装，这样可以提高其工作效率。文献[10]中激振器的质量为80kg，产生激振力的峰值为650N。图8－12为激振器刚性固定在地面(线1)、安装在气动隔振器上(f_v＝2.5Hz)(线2)以及它首先被刚性安装在混凝土质量块上(重1000kg)，然后再安装在一个阻尼为η＝0.01、频率f_v＝0.5Hz的隔振器上(线3)时传递到地面的力。采用“直接”隔振的方法可以在重要的频段内((7～20)Hz)使传递率减小(1～1.5)个数量级。在f_v＝2.5Hz左右，传递率在(1～3.3)Hz的频率范围内变差。当隔振系统中惯性质量块的质量是隔振器的12.5倍、自然频率为隔振器的0.5倍时，在相同的频率范围内可以使传递率降低35倍之多，但这通常是不必要的，因为这将导致在该频率范围内产生的激励力约为1.5N。

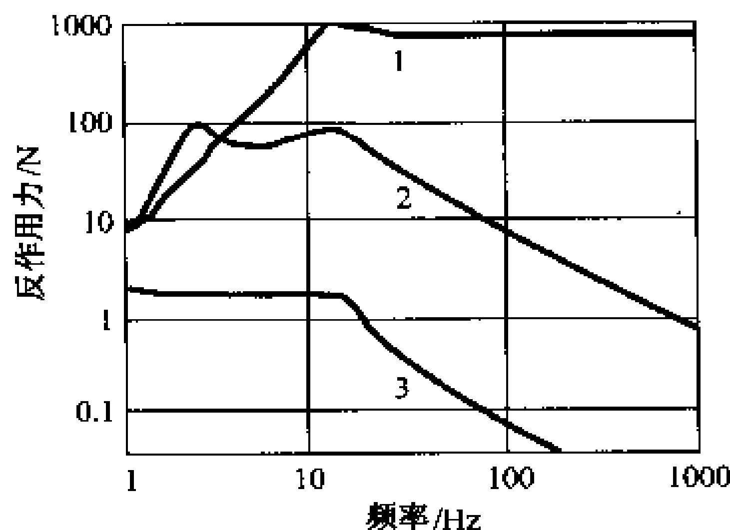


图8－12　激振器在三种不同的安装方式下传递到地面的力

1—直接安装在地面上；2—安装在隔振器上(f_v＝2.5Hz)；

3—安装在由隔振器(f_v＝0.5Hz)支承的水泥厚平板上。

采用惯性质量块对提高激振器的效率非常重要。激振器有效行程的减少取决于因子$K = M_B/(M_B + M_D + M_T + M_C)$[10]，其中$M_B$＝80kg为激振器的质量，$M_D + M_T$＝25kg为试件和工作台的总质量，$M_C$＝1.3kg为可动线圈的质量。由于惯性块可以有效地增加M_B，所以直接安装在隔振器上时K＝0.75，而应用了惯性块时

$K=0.98$。因此，当隔振系统自然频率较小时，应用惯性块不仅可以减小传递率，而且还可以大大地提高系统的动态效率。当然，也可以通过增大 f_r 或者应用虚拟惯性块来提高其效率（如通过具有运动转换能力的隔振器来实现，见 5.2.4 节）。

2. 产生多向激励的物体

在对产生频率为 f 的单频激励力的物体（如由不平衡元件旋转产生）进行隔振时，通常采用的频率比为 $f/f_{vz} \geqslant 4 \sim 5$，其中 f_{vz} 是隔振系统在垂直方向上的自然频率。由式（5－6）和式（5－18）可知，动态力的垂直分量减小了（15～25）倍（尽管现代平衡技术通常认为没有必要采用这种隔振方法），因此在设计过程中可以选择很小的 f_{vz}。例如，当转子转速为 1300r/min 时，选取 $f_{vz}=(6\sim7)$Hz；转速为 900r/min 时，选取 $f_{vz}=(3\sim4)$Hz。通常使用钢弹簧隔振器就能够满足这个要求。由于这些隔振器阻尼很小，并在高频范围（f 约大于 $10f_{vz}$）内性能比较差，所以由轴承误差、间隙等原因引起的高频激励不会被衰减，甚至可能被放大。

考虑到隔振系统在各种模态下有不同的传递率，因此需要根据实际情况来确定频率比的大小。其中，最危险的一种情况是被隔振物体在垂直方向上产生的激励力最大。由于水平振动（摇摆）自然频率较低，它不会使被隔振物体产生很大的偏移，除非被隔振物体在垂直方向上的自然频率很小。因此，激励力在水平方向上的分量比较容易隔离。在垂直方向上产生剧烈振动的典型例子是带（水平或者倾斜放置的）不平衡转子的物体。

对沿水平（y 轴）方向放置的不平衡转子而言，激励力主要存在两个分量，z 方向的分量 F_z 和 x 方向的分量 F_x。对 F_z 来说，隔振系统的传递率由自然频率 f_{vz} 决定；对于 F_x 来说，则取决于较弱的摇摆模态（见 5.4 节）的自然频率 $f_{x\beta}$。如果作用在转子上的扭矩随着频率 f 发生变化，那么振荡扭矩 T_y 的传递率由摇摆模态的自然频率 $f_{x\beta}$ 和 $f_{\beta x}$ 确定（大多数情况下，由较大的 $f_{\beta x}$ 确定）。振荡扭矩并不是一直都存在，但在内燃机中非常明显。对垂直放置（z 轴）的不平衡转子而言，相应的情况是 $F_x-f_{x\beta}$ 和 $F_y-f_{y\alpha}$（较弱的摇

摆模态),扭矩为 f_y,这里没有考虑模态耦合。

隔振的效果取决于对所有动态力和力矩分量的衰减程度。动态力的两个正交分量的相位差是$\pi/2$。对于一个沿 z 轴放置的轴

$$F_x = F_o \sin 2\pi ft;\ F_y = F_o \sin(2\pi ft - \pi/2);$$

$$F'_x = F'_{xo} \sin 2\pi ft;\ F'_y = F'_{yo} \sin(2\pi ft - \pi/2); \quad (8-23)$$

$$\mu_{F_x} = F'_{xo}/F_o;\ \mu_{F_y} = F'_{yo}/F_o;$$

$$\mu_F = \frac{\sqrt{(F'_{xo}\sin 2\pi ft)^2 + (F'_{yo}\cos 2\pi ft)^2}}{F_o} \quad (8-24)$$

式中:F_o 是离心力的幅值,其中(′)表示隔振器输出端的分量;μ_{F_x} 和 μ_{F_y}是沿对应轴的传递率,μ_F 是总传递率;三角表达式$(A\sin\varphi)^2 + (B\cos\varphi)^2$ 的幅值为 $\max(A^2, B^2)$,因此,整体传递率为

$$\mu_F = \frac{\max(F'_{x0}, F'_{y0})}{F} = \max(\mu_{F_x}, \mu_{F_y}) \quad (8-25)$$

水平或垂直放置的转子的振荡扭矩只有一个分量,因此传递率的表达式是一个非常简单的式子。

由此可知,隔振效果仅由两个模态的传递率确定,即力矩和力的最高模态的传递率。在许多情况下,只存在一个重要的因子(力或力矩),因此可以只需考虑一个模态的传递率。如果两个因子都存在,那么可以采用有效传递率 μ 或者它们的加权平均值。对于沿 z 轴和 y 轴放置的转子,相应地有

$$\mu_z = \frac{1}{2}(W_F\mu_F + W_T\mu_T) =$$

$$\frac{1}{2}[W_F\max(\mu_{F_x}, \mu_{F_y}) + W_T\max(\mu_{T_x}, \mu_{T_y})] \quad (8-26)$$

$$\mu_y = \frac{1}{2}[W_F\max(\mu_{F_z}, \mu_{F_x}) + W_T\max(\mu_{T_z}, \mu_{T_y})] \quad (8-27)$$

式中：加权系数 $W_F + W_T = 2$。一般情况下，扭矩传递的危害性比较小。对大型隔振器来说，产生输出扭矩的力很小；对小型隔振器来说，扭矩对支承结构的作用是局部的。因此，在许多情况下，假设 $W_F = 2W_T$。由于力和扭矩使隔振器产生的反作用力必须以矢量的形式进行合成，所以式(8－26)和式(8－27)所得到的结果相对比较保守。用于对机器进行隔振的典型隔振系统的参数值为：$\eta_{x,y} = k_z/k_{x,y} = 4 \sim 6$；$f_{z\beta}, f_{y\alpha} = 0.4 \sim 0.45f_z$；$f_{\beta y}, f_{\alpha x} \cong 1.2f_z$，$f_y \cong 1.15f_z$。如果阻尼适中($\delta_s = 0.6$)，所需要的 $\mu = 0.20$(在大多数情况下5倍衰减量是能满足要求的)。从式(8－26)和式(5－6)可以知道沿 z 轴放置的转子所需要的频率比约为 $f/f_z > 2.0$；由式(8－27)和式(5－6)可知沿 x 轴放置的转子的频率比约为 $f/f_z > 2.6$。如果扭矩的波动不严重并可以被忽略($W_T = 0$)，那么沿垂直方向(z 轴)放置的转子应满足 $f/f_z > \sim 0.9$，沿 x 轴放置的转子应满足 $f/f_z > \sim 2.0$。显然，如果要求实现更大程度的衰减，这些频率比值应该增大。根据前面所讨论的方法不难求出这些值。然而，当转子沿垂直方向布置时，其结果还需要进行修正，主要是由于 f_z 和 f 之间相差不大，从而不可避免地导致坐标之间出现耦合，使垂直方向的振动加剧。在这种情况下，取 $f/f_z > \sim 1.5$ 是安全的。

这里通过一个具有垂向轴的锤式破碎机对上述结论进行实验验证($f = 12\text{Hz}$；$f_{x\beta} = f_{y\alpha} = 1.66\text{Hz}$；$f_{\beta x} = 3.5\text{Hz}$；$f_{\alpha y} = 4.0\text{Hz}$；$\mu F_x = 0.02$；$\mu T_x = 0.093$；$\mu T_y = 0.125$)。令 $W_F = 2W_T = 1.33$，应用式(8－26)计算得到 $\mu = 0.042$。通过测量有无隔振器时地面的振动，可以得到 $\mu = 0.0355$。

从式(8－26)、式(8－24)和式(5－6)可知，对给定的衰减量 μ 而言，很容易确定隔振器所需的自然频率。当激励力由不平衡转子产生时，在瞬态过程内这种力非常大并被传递到支承结构中。产生瞬态过程主要是由于转子需要加速到工作转速，或减速(停止)。通常情况下，后者比前者危害更大，因为减速过程一般比加速过程长，从而可能出现准共振现象，除非采用了刹车装置。表

8－1 列出了采矿业中用到的 6 个($A-F$)显示屏的设计参数以及传递到支承结构上的动态载荷。从表中可以看出，瞬态过程传递的动态载荷比稳态载荷大(5～6)倍。这主要是由于瞬态振动激起了隔振系统中较低自然频率的准共振条件。虽然在大多数情况下这种持续时间短、强度大的动态力并不十分危险，但仍然希望能减小其幅值。工程中可以通过采用一些简易的方法(如快速刹车)和增加隔振器阻尼来减小隔振系统中的共振幅值。在表 8－1 中，W 表示带有振动箱的机器(显示屏)重量；n 表示主转子的转速，r/s；a_{ac}表示平均加速度，r/s^2；a_{dec}表示平均减速度，r/s^2；k_v 表示隔振器的垂直刚度，10^5N/m；k_h 表示隔振器的水平刚度，10^5N/m；f_v 表示垂向自然频率，Hz；F_{wv}、F_{wh}分别表示工作状态下由隔振器传递的垂直和水平方向的力，N；F_{tv}、F_{th}分别表示在减速过程中，由隔振器传递的垂直和水平方向的最大力，N。

表 8－1　在正常工作状态下以及瞬态过程中显示屏上产生的动态力

模式	W	n	a_{ac}	a_{dec}	k_v	k_h	f_v	F_{wv}	F_{wh}	F_{tv}	F_{th}
A	1740	25	18	1.6	8.4	35	4.5	2760	8380	16560	50000
B	2135	21.5	18	1.6	8.4	35	4.1	3300	10100	19800	60600
C	2395	21.5	6.8	1.3	8.4	35	3.9	2940	9020	17640	54120
D	3080	16.5	6.8	1.3	10.9	45.5	4.0	4530	14350	27180	86100
E	2750	20	—	—	11.7	—	5.0	3500	—	21000	—
F	1800	12	6.7	1.1	—	—	—	—	4200	—	17000

8.2.2　产生多频激励力的物体

对多频激励力的隔振主要取决于如下一些因素，例如，激励力的频谱成分；最低有害频率的绝对值；被保护设备和结构的动态特征；被隔振物体的工作模式等。在某些情况下，特别是当机器带有惯性质量块时，如果采用大阻尼隔振器(其本身的阻尼不能显著减小共振时的传递率)，那么共振区(不是危害最大的频谱成分所

在的区)有可能成为允许的工作区。同时,必须注意动态力的频谱成分和它们作用的方向(垂直或水平方向)。

表 8－2 给出了在两种不同设计方案下由织布机旋架(x 方向,F_x)和梭子(y 方向,F_y)产生的动态力的频谱。这两种不同的设计方案分别为:(a) 每分钟 220 个冲程(3.7 冲程/s);(b) 每分钟 180 个冲程(3.1 冲程/s)。在某些情况下,虽然第 1 阶谐波激励最剧烈,但有时也可能是第 3 阶、第 4 阶,甚至是第 8 阶谐波激励最大。第 1 阶谐波激励的频率非常小,所需隔振器的刚度也较小,但动态力作用的方向是水平方向,因而需要采用垂直刚度大、水平刚度小的隔振器。

隔振器的这种刚度模式使织布机产生平动而非摇摆运动,因而减小了其水平位移的最大幅值。同时必须注意,低阶谐波(特别是第 1 阶谐波)并非最危险的成分,而高阶谐波比较容易隔离。这里虽然没有隔离所有谐波激励(甚至其中有个别谐波被放大),但厂房内的振动还是得以明显减少。由于织布机的特殊性,在一个厂房内可能有几百台机器,因此给每台机器(即使是几台机器共用一个)建造一个基础所需要的成本高。然而,可以用一个相对较轻且价格便宜的刚性框架将这些机器连接起来,因此即使它们被安装在垂直刚度很小的隔振器上时,机器也只产生平动而不会产生摇摆运动。

表 8－2　由织布机产生的简谐力的幅值

谐波号 j	(a)			(b)		
1	3.7	4670	108	3.1	501	330
2	7.4	1630	241	6.2	—	400
3	11.1	1800	596	9.3	1390	—
4	14.8	705	242	12.4	3000	410
5	18.5	593	279	15.5	1370	500
6	22.5	387	230	18.6	664	320

（续）

谐波号,j	(a)			(b)		
7	25.9	263	77	21.7	—	—
8	—	—	—	24.8	—	600
9	—	—	—	27.9	627	480
10	37	267	82	31	254	290

多频简谐激励的第 1 阶谐波通常由被隔振物体的基本运动确定，而较高阶的谐波受到设备空间分布、连接件间隙变化、形状变化等因素的严重影响。因此，对相同型号的不同机器或装置而言，高阶谐波的幅值可能不同。例如，图 8－13[11] 为外圆磨床上两台相同的感应电机（$n=1500$r/min）在 $X-Z(M_y)$ 和 $Y-Z(M_x)$ 平面内测得的垂向动态力 F_z 以及动态力矩的频谱图。最明显的谐波

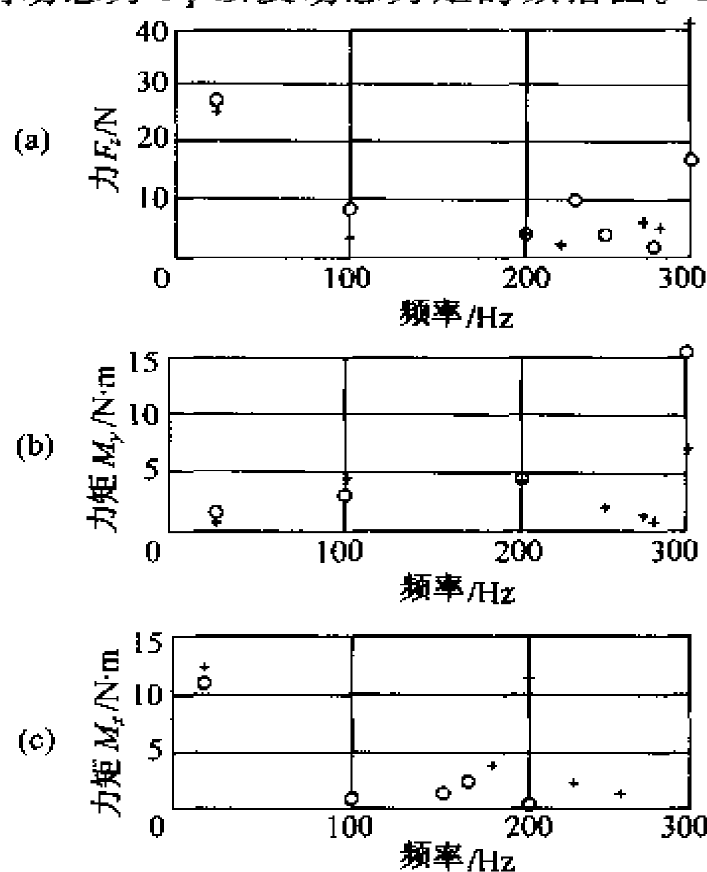


图 8－13　两台相同型号的感应电机在安装点处的反作用力（F_z）频谱和反作用力矩（M_x，M_y）频谱的变化

是频率为25、100、200、300Hz的谐波，它们是电源频率$f_{el}=50\text{Hz}$的倍数。虽然在25Hz处，两台机器频谱的幅值非常相似，但其它频谱成分的幅值差别很大。因此，在为产生多频激励的物体进行隔振设计时，应考虑这种因素。

8.2.3 产生保守冲击激励的物体

产生"保守冲击"的典型物体是冲压机[12]。冲击产生的反作用力矩将激发$x-z$平面内的低阶摇摆模态。大量的试验研究表明，由冲压机产生的脉冲和正矢脉冲(见5.6节)在形状上非常相似。常用的曲轴式冲压机典型的工作条件可以用脉冲表示。在自动模式下，脉冲持续时间约为$\tau=0.1t_c$；在手动模式下，脉冲持续时间约为$\tau=0.05t_c$(一个冲程)；t_c是一个工作循环的时间(曲轴运转一周)。由于自动工作模式通常和每分钟较高的冲程数相对应，而手动模式和较小的每分钟冲程数对应。因此，当自动工作模式的最大每分钟冲程数即n_{max}已知时，可以通过下式计算组合隔振系统的名义脉冲持续时间

$$\tau=0.1(60/n_{max})=6/n_{max} \qquad (8-28)$$

当冲压机和地面刚性连接时，低阶摇振模态的自然频率为$f_{x\beta}$，$f_{y\alpha}=15\sim25\text{Hz}$，这和基础的垂向自然频率非常接近。因此，对广泛使用的$n_{max}=60$行程/min～200行程/min的冲压机而言，由5.6节中所讨论的正矢脉冲冲击谱可知，作用在基础上的动态载荷可能被放大(1.2～1.5)倍。有时冲压机被固定在一个质量与其相当的惯性块(基础)上，这将使动态脉冲向周围环境的传递减少约50%。此时，其传通率约为$\mu=0.6\sim0.75$。考虑到将冲压机安装在隔振器上时显著地衰减了脉冲中的高频成分，可以假设隔振器对脉冲幅值的衰减程度为$\mu=0.5$，并假设隔振器的阻尼$\delta_v=0.6$，从图5-36(b)中的冲击谱可以计算出所需的脉冲持续时间与系统振动周期之比为$\tau/T_v\approx0.2$，或

$$T_v=\tau/0.2=(6/0.2)(1/n_{max})=30/n_{max} \quad (\text{s});$$

$$f_{\tau} = f_{z\beta} = n_{max}/30 \quad (Hz) \tag{8-29}$$

在某些情况下，将冲压机安装在隔振器而非刚性机座上，主要是为了便于安装/重新安装，避免对机器进行固定并减小噪声的传递，但不要求衰减脉冲幅值，或者 $\mu = 1$（但高频振动和噪声产生的脉冲成分仍然被明显地衰减）。因此，根据图 5－36(b)可知 $\tau/T_v \approx 0.4$，或者

$$T'_v = \tau/0.4 = 15/n_{max}(s); \quad f'_{z\beta} = n_{max}/15 \quad (Hz) \tag{8-30}$$

隔振系统的主要参数是垂向自然频率 f_{oz}，它是选择隔振器的基本参数。如果 a_z/a_x 和 η_z 已知，应用式(5－75)很容易由 $f_{z\beta}$ 确定该自然频率的大小。这里 a_z 是重心位置距离支承面（地面）的高度，a_x 是 x 方向重心在支承面上的投影点和安装点之间的平均距离，η_x 是隔振器的刚度比。图 8－14 为市面上一些冲压机的 a_z/a_x 与 W（重量）之间的函数关系。曲线 1 对应于工程中广泛应用的冲压机。线 2 表示设计的理论曲线，它对应于重心比较高（a_z 大），座架间距比较小（a_x 小），不适合于在隔振器上进行安装的冲压机。

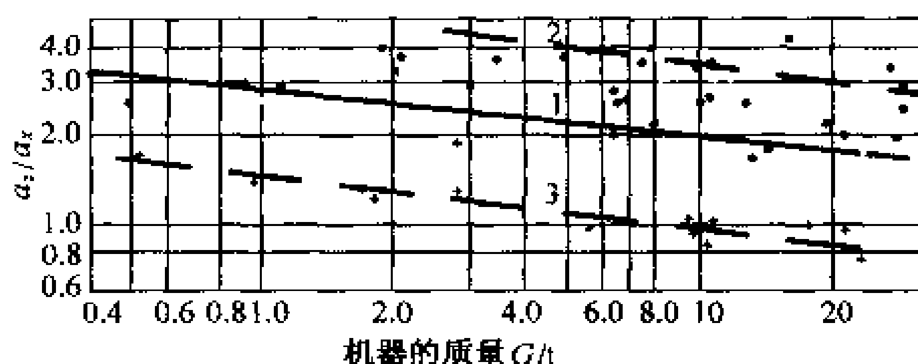


图 8－14　机器安装点处 a_z/a_x 的平均值和机器质量之间的关系

（• 立式的冲床；+ 卧式冷镦机）

由低速冲压机向地面传递的动态载荷对支承结构的危害通常不是很大。速度越高，支承结构所承受的载荷越大，脉冲序列的离

次谐波可能和结构的自然频率(通常为(15～40)Hz)相近,从而可能产生共振。因此,对低速机械式冲压机($n_{max}\leqslant\approx100$ 行程/min)而言,可以应用式(8－30)来计算 $f_{z\beta}$ 的值,而对高速冲压机来说($n_{max}\leqslant\approx200$ 行程/min),需要应用式(8－29)。当 n_{max} 取中间值时,可以通过插值方法可以得到 $f_{z\beta}$ 的值。通过考虑图 8－14 中曲线 1 所对应的冲压机以及隔振器的两种典型的刚度比:$\eta=4.0$(实线),$\eta=2.5$(虚线),图 8－15 给出了冲压机在垂直方向上的自然频率 f_{uz}。

对于重心位置比较高/基础比较窄的冲压机(图 8－14 中的曲线 2)而言,所需的 f_{uz} 更大(图 8－15 中的点线),并且仍然可以观察到剧烈的摇摆振动。这种情况可以通过将冲压机安装在框架或者钢轨上来加以修正。如果冲压机的设计者在设计过程中考虑了隔振安装并采取了(简单的)措施来减小 a_z/a_x 的比值,那么可以得到非常好的效果。

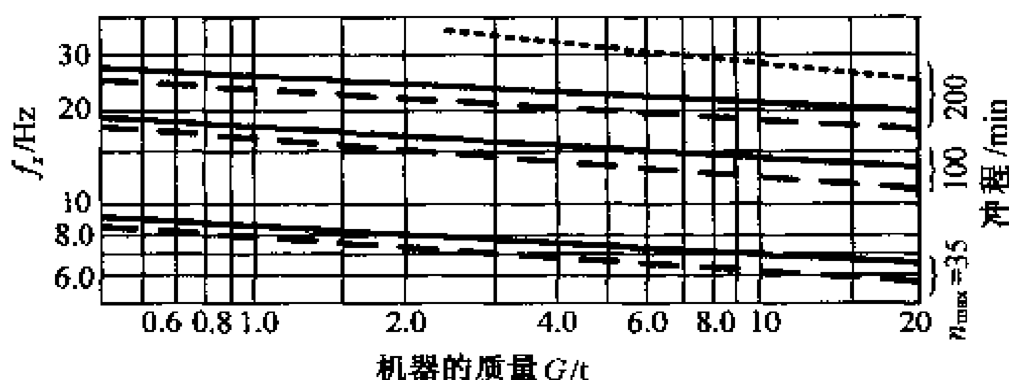


图 8－15 立式冲压机隔振系统的推荐自然频率

冲压机在垂直平面内产生动态载荷,而一些生产机械(如冷锻机、注模机等)则在水平方向产生剧烈的动态载荷。这些机械在生产过程中除了产生常见的保守脉冲以外,由于它们还具有可反向运动的重型部件,这将产生强大的水平惯性力。这些力可使隔振器上的机器产生剧烈的摇摆振动。采用较大的 a_x 在某种程度通常可以减少这种振动,也可以通过增大隔振器的刚度来减小这种有害的摇摆振动。因此可以应用式(8－30)来确定这些机器

的垂向自然频率。图 8－16 表示应用式(8－30)所得到的冷锻机在垂直方向上的自然频率 f_{zz}。当 $\eta_x=2.5$ 时，a_z/a_x 和 W 之间的关系如图 8－14 中的曲线所示。

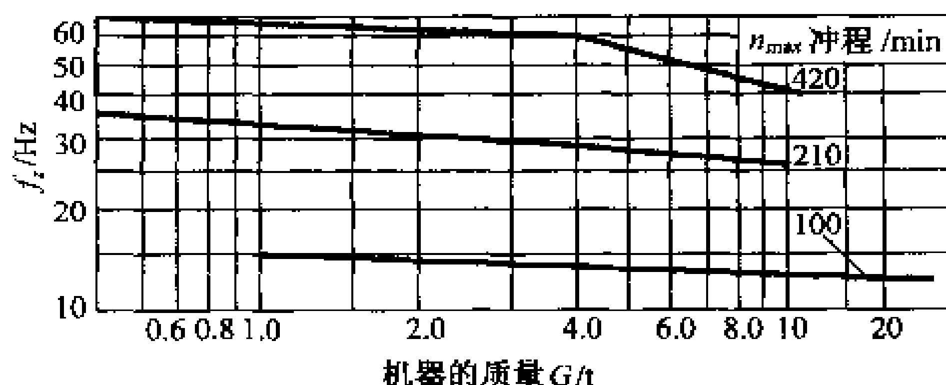


图 8－16 冷镦机隔振系统的推荐自然频率

8.2.4 产生惯性冲击激励的物体[13]

产生惯性冲击的机器，如锻锤、模型振实机、冲击实验机等，都是工业生产中最具危害的振源。锻锤(落锤)是一种工作效率很高的设备，它不仅能有效地提高产品的力学性能，而且设计相对简单、费用较低。尽管如此，锻锤的应用还是日趋减少。很大程度上是由于它传递到周围环境中的振动非常剧烈，而且减小(隔离)这些振动所需要的费用(以及所占用的空间)很大。锻锤通常被安装在一块大型基础块上，然后用一些柔性钢弹簧支承。基础块起着双重作用。一方面它可以当作一个自然频率较低(f_{zz}＝(2～7) Hz)的稳定隔振系统；另一方面它提高了冲击能量传递到钢坯的效率(见 8.2.1 节，它和激振器中的惯性质量所起的作用相似)。阻尼是由强大的黏性摩擦元件或大型橡胶元件提供的，但其阻尼通常较低(δ＝0.1～0.3)。隔振安装时首先需要把栎木梁或者由加强橡胶带制成的隔振垫放置在铁砧下。下面将利用改进型冲击谱法(见 5.6 节)推导出这种复杂系统中传递率的解析表达式。这些表达式说明了在对锻锤和其它能产生强大惯性冲击的设备进行隔振时，如何在不影响其工作性能的情况下降低隔振系统的费

用和尺寸。

图 8－17 是对锻锤进行隔振的示意图。m_1 表示上止点处落锤的质量；m_2 表示铁砧质量；$m_3 = m'_3 + m''_3$ 表示框架 m'_3 和基础块 m''_3 相连；m_4 表示基础箱的质量。k_1 和 c_1 分别是钢坯的刚度和阻尼，k_2 和 c_2 分别是铁砧和基础块之间第一隔振台的刚度和阻尼，k_3 和 c_3 分别是主隔振器的刚度和阻尼，k_4、c_4 分别是周围土壤的有效刚度和阻尼系数。通常情况下，土壤的载荷—变形特性是非线性硬特性，类似于等固有频率特性。因此，系统中的 k_4、c_4 可以用土壤的（于系统）自然频率 f_{n4} 来描述，如表 8－3[14] 所列。一般来说，土壤的阻尼非常大，在中等振幅（$a = (2 \sim 3)\,\mu m$）的情况下，$\delta \approx 0.5 \sim 0.6$；当幅值更小时，阻尼也更小。这类似于金属丝网材料。对于锻锤隔振系统，其子系统的自然频率分别为 $m_2 - k_2 - m_3$ 系统的自然频率约为 50Hz，$m_3 - k_3 - m_4$ 系统的自然频率为 (2～7)Hz，基础箱和土壤子系统 $m_4 - k_4$ 的自然频率通常为 (15～25)Hz（见 5.3 节）。由于各个子系统的自然频率相差很大，它们之间的动态耦合不是特别严重，因此在进行第一次近似时，可以认为它们是相互独立的。

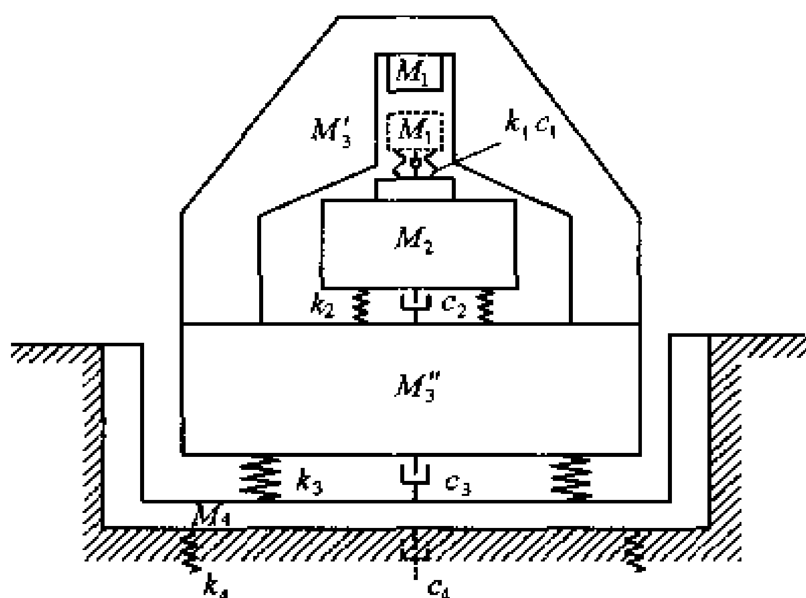


图 8－17　锻锤隔振系统的动态模型

表 8－3　土壤的近似自然频率

土壤类型	f_{n4}/Hz	土壤类型	f_{n4}/Hz
泥炭	7.5	很轻的软土	12
沙滩上 2m 厚的泥炭	12.5	硬黏土	19
浸少量水的沙滩	15	潮湿的三层黏土	21.8
具有合适密度的粒沙	24.1	含有黏土的沙	19.4
含 30%粒沙的精细沙	24.3	泥和沙的混合物	23.3
均匀的粗沙	26.2	石灰石	30
紧密的混合沙	26.7	花岗岩	40
紧密的细砾	28.1		

锻锤的冲击脉冲可以近似地认为是一个半正弦脉冲，其幅值 P_0 和持续时间取决于钢坯的材料、温度、形状以及锻模的尺寸。最糟糕的情况是在上止点和下止点之间没有钢坯时发生的冲击。文献[15]测量了在这种情况下不同重量落锤的脉冲参数，如表 8－4 所列。

表 8－4　锻锤的冲击参数

落锤的质量(锤头＋上部锻模)m_1/t	1	2	3	5	5.5	10	15	20
脉冲延时，τ_{p1}/ms	1.0	1.26	1.44	1.69	1.75	2.07	2.45	2.64
载荷脉冲幅值，P_0/kN	1925	2830	3700	5130	5500	7500	10890	12400

由于锻锤产生的激励具有脉冲特征，因此很自然地想到应用冲击谱法进行研究(见 5.6 节)。当脉冲 P_0 作用在如图 8－18 所示的两质量系统上时，根据式(5－111)可知在弹性连接 k 上载荷的最大值为

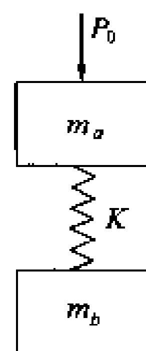


图 8－18　两自由度振动系统

$$P_{k\max}=\frac{m_b}{m_a+m_b}AP_o \qquad (8-31)$$

式中：A 是冲击谱的传递率。由于脉冲激励下响

应的第一个阶段可以近似为正矢脉冲，而且图 8 - 17 中子系统的模型可认为是动态独立的，所以某个子系统第一阶段的响应可以当作是作用在第二个子系统上新的正矢脉冲。

当锻锤 m_1 落下时，锻锤的载荷脉冲（持续时间为 τ_{p1}，幅值为 P_0）作用在铁砧 m_2 上。根据式(8 - 31)，在隔振器 k_2、c_2 中产生的最大力为

$$P_{2\max} = \frac{m_3}{(m_1 + m_2) + m_3} A_1 P_0 \tag{8-32}$$

式中：A_1 是半正弦脉冲作用下的冲击谱值，它是 τ_{p1}/T_{n2} 的函数（从图 5 - 36（b）可以看出），$T_{n2} = 2\pi\sqrt{[(m_1 + m_2)m_3/k_2(m_1 + m_2 + m_3)]}$ 是系统 $(m_1 + m_2) - k_2 - m_3$ 的周期。由于刚度 k_1 通常比较大，所以质量 m_1 和 m_2 可以假设为一个整体。从图 5 - 37 可以知道，在特定的范围 $\tau_{p1}/T_{n2} = 0.05 \sim 0.15$，$\tau_{p2} = (0.5 - 0.6)T_{n2} \approx 0.55T_{n2}$ 内，当 m_3 受到持续时间为 τ_{p2}、幅值为 $P_{2\max}$ 的正矢脉冲作用时，主隔振器 k_3、c_3 上产生的最大力为

$$P_{3\max} = \frac{m_4}{m_3 + m_4} A_2 P_{2\max} = \frac{m_4}{m_3 + m_4} \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} A_1 A_2 P_0 \tag{8-33}$$

式中：A_2 是正矢脉冲作用下的冲击谱值，它是 τ_{p1}/T_{n2} 的函数（从图 5 - 36(b)可以看出），$T_{n3} = \frac{1}{f_{n3}} = 2\pi\sqrt{m_3 m_4/k_3(m_3 + m_4)}$ 是系统 $(m_3 - k_3 - m_4)$ 的周期。被隔振锻锤的基频为

$$f_{oz} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_3(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{(m_1 + m_2 + m_3)m_4}} = f_{n3}\sqrt{\frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_3 + m_4)}} \tag{8-34}$$

通常，$\tau_{p1} \ll T_{n2}$，$\pi_{p2} \ll T_{n3}$，所以由式(5-113)可以求出 A_1、A_2 的解析表达式，将其代入式(8-33)得

$$\frac{P_{3\max}}{P_0} = \frac{m_4}{m_3 + m_4} \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} 4 \frac{\tau_{p1}}{T_{n2}} \left(\cos \frac{\pi \tau_{p1}}{T_{n2}} \right) \frac{\pi \tau_{p2}}{T_{n3}} \tag{8-35}$$

令 $\tau_{p2} \approx 0.55 T_{n2}$，将式(8-34)代入(8-35)，得

$$\frac{P_{3\max}}{P_0} \approx 6.9 \sqrt{\frac{m_3 m_4^2}{(m_3 + m_4)(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}} \tau_{p1} f_{nz} \tag{8-36}$$

式(8-36)给出了隔振系统的传递率。研究表明，在隔离短时脉冲激励时，被传递的力($P_{3\max}$)和隔振系统的自然频率成正比，而在隔离稳态(正弦)激励时，被传递力和自然频率的平方成正比。对后一种情况来说，传递到支承结构或周围土壤的振动频率和激励频率相同。对冲击激励而言，所传递振动的频率和主隔振系统的自然频率相等，这种振动的危害并不十分严重。通过上述近似与假设可以知道，隔振效果并不直接依赖于辅助隔振系统的刚度 k_2。当脉冲力 $P_{3\max}$ 作用在基础箱上时，产生的振幅约等于在 $P_{3\max}$ 作用下产生的静态位移。$P_{3\max}$ 的频率变化范围为 $f_{nz} = (2 \sim 7)$ Hz，比基础箱一土壤($m_4 - k_4$)于系统的自然频率 $f_{nz} = (15 \sim 20)$ Hz 小得多(见表 8-3)。因为土壤的刚度 k_4 是非线性的，因此有效刚度 k_4 可以通过下式计算

$$k_4 = 4\pi^2 f_{n4}^2 m_4 \tag{8-37}$$

土壤振动幅值的第一次近似可以表示为

$$a_s = \frac{P_{3max}}{k_4} = \frac{P_{3max}}{4\pi^2 f_{n4}^2 m_4} = 0.17$$

$$\sqrt{\frac{m_3 m_4^2}{(m_3 + m_4)(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}} \frac{\tau_{p1} f_{vz}}{f_{n4}^2} \tag{8-38}$$

例：某锻锤装置 $m_1 = 5000\text{kg} = 5\text{t}$、$m_2 = 20m_1$、$m_3 = 60m_1$、$m_4 = 40m_1$、$\tau_{p1} = 0.0017\text{s}$、$f_{vz} = 4.5\text{Hz}$、$P_0 = 5.1 \times 10^6\text{N}$，由式(8－36)可以求出 $P_{3max} = 0.0165P_{omax} = 0.0083 \times 10^6\text{N}$，由式(8－38)可求出土壤产生的振幅为 $a_s = 2.3 \times 10^{-4}\text{m}$(如图 8－19 中的＊号所示)。在距离锻锤约 3m 的位置测量得出土壤的振幅为 $a_s = 1.8 \times 10^{-4}\text{m}$(图 8－19 中的曲线 4)。理论值和实际测量值之间的误差约为 24%，这主要是由于以下几个原因：测试过程中的冲击条件不太严格(用锻造好的钢坯代替刚性锻模)；土壤对振动有衰减；在分析过程中没有考虑土壤的非线性以及阻尼 c_2、c_3、c_4。

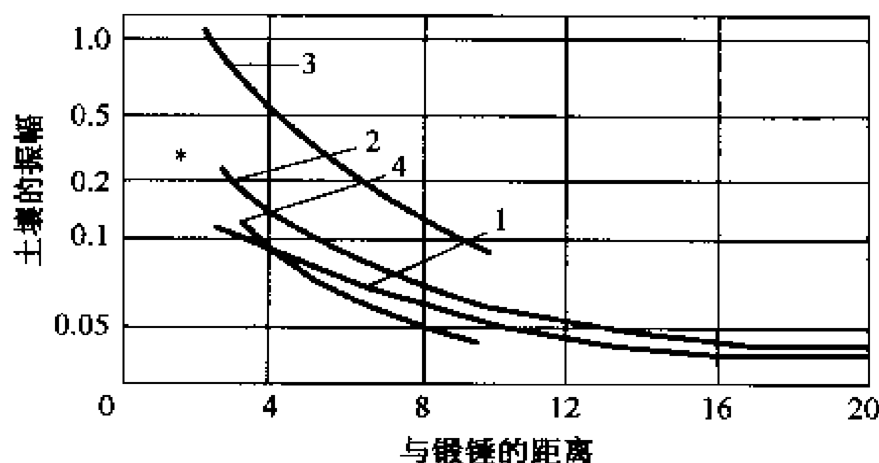


图 8－19　锻锤附近土壤的振动位移幅值

1—采用了隔振系统的锻锤，$f_n = 6\text{Hz}$，落锤质量为 2t；

2—没有采用隔振系统的锻锤，$f_n = 20\text{Hz}$，落锤质量为 0.75t；

3—没有采用隔振系统的锻锤，$f_n = 18\text{Hz}$，落锤质量为 2t；

4—采用了隔振系统的锻锤，$f_n = 4.5\text{Hz}$，落锤质量为 5t；

＊—第四种情况下采用式(8－38)计算得到的理论值。

铁砧下隔振器的阻尼通常决定了对数衰减率的大小，其阻尼为 $\delta_2=0.2\sim0.3$；主隔振器（与钢弹簧并联的阻尼器通常采用橡胶体）的阻尼 $\delta_3=0.1\sim0.3$。由于工厂和居民建筑物基础的自然频率和锻锤隔振基础的自然频率在相同的范围内，因此建筑物有可能发生准共振（因为土壤对锻锤产生的振动衰减速度比较慢）。这种现象可以通过对距离锻锤（$f_{oz}=3.9\text{Hz}$）400m 处的建筑进行实验加以验证[16]。

根据式（5－114），增加铁砧和主隔振器的阻尼值将会在一定程度上减少冲击谱的大小。采用橡胶和金属丝网材料（见第 3 章）可使 δ 的值处于 1.0～1.5 之间，而式（8－33）中的 A_1 和 A_2 可以减小（1.15～1.2）倍，因而 f_{oz} 增加（1.3～1.4）倍，但这不会影响隔振效果。

此外，在主隔振器中增加阻尼可以加快基础振动的衰减，因而减少锻锤产生的振动对人员、精密设备和其它结构的影响。从图 5－36（e）可以看出，在“衰减正弦脉冲”（脉冲）的激励下，当 δ 由 0.3 增大到 1.25 时，系统相对振动的减少量是发生准共振时的 2.55 倍；当激励脉冲的频率 f 为 $2f_s$（f_s 是被激振结构的自然频率）时，可以使相对振动减小 1.25 倍。

考虑到阻尼增加对隔振效果产生的影响，对于产生惯性冲击的物体，隔振系统的主要参数不再是主自然频率 f_{oz}，而是冲击隔离指标：

$$\Phi_{sh}\cong\frac{f_{oz}}{\delta^{0.25}}\tag{8-39}$$

因此，将主隔振器和铁砧隔振器的阻尼 δ 由 0.3 增大到 1.25 时，隔振系统的自然频率可以增加 1.5 倍，即从 $f_{oz}=(2\sim7)\text{Hz}$ 增加到 $f_{oz}=(3\sim10)\text{Hz}$，但不会减小隔振效果。这是一项很有意义的改进措施，因为在不破坏系统的工作性能和稳定性时，可以采用刚度更大的弹簧并减小基础的质量 m_3，极大地降低了成本。对于图 8－17 中的某个单元，通过采用由刚性元件 k_3 和阻尼元件 c_3 组合

在一起的橡胶弹簧，可以使自然频率变得更大，因而更进一步减少费用。

以上结论可以通过对安装在基础块上的锻锤(0.75t 重)进行实验来加以验证。基础块由几层橡胶隔振垫支承，可达到 $f_n = 7Hz$，$\delta = 0.8$。实验结果表明，系统的性能非常令人满意，它与基础被自然频率非常小的弹簧支承时的性能相似。

通过采用具有运动转换器(见 5.2.4 节)的隔振基础可以进一步减小产生惯性冲击激励物体所需隔振系统的费用和尺寸。

8.3 通用机械设备的隔振

通用机械设备的品种繁多。其隔振系统参数的选择受到多种因素的影响，如生产过程中的动态稳定性、振级的大小和连接件(特别是轴承)的动态载荷等。在许多情况下，由于振动减小了设备和地面之间的有效摩擦，如果将设备安装在隔振器上后再固定在地面上，就可以防止它任意“走动”。同时，应用隔振器也可以减小厂房和相邻房间内的噪声级。

8.3.1 安装条件对动态稳定性的影响[17]

机械设备在生产过程中，特别是切割过程中的动态稳定性受到许多因素的干扰，其中最明显的是在工作区内引入负阻尼[18]。因此，当系统中总的阻尼包括机械结构和生产过程中的阻尼为负值时，就会发生颤振(自激振动过程)。当机器底座采用刚性座架并与刚性基础连接时，可以提高机械的动刚度，阻止颤振的发生，而柔性座架如隔振器则达不到这种效果。

隔振系统中的自然频率和阻尼对生产过程中的动态稳定性的影响可以利用 5.3 节中推导出来的关系式进行分析。对于切割金属的机床，其隔振系统对动态稳定性的影响可以通过图 5-14(a)中的动态模型进行估计得到，其中 $m_1 \approx m_u$ 是机械上层部件(刀

架)的有效质量，$m_2 = m_b$ 是底座/框架的有效质量，$k_{12} = k_m$ 是机械的有效结构刚度，$k_2 = k_v$ 是隔振器的刚度，$m_3 = \infty$ 是基础的质量。该系统有两个自然频率 f_1 和 f_2。较小的自然频率 f_1 接近于子隔离系统 $m_b - k_v$ 的自然频率 f_v，较大的自然频率 f_2 接近于结构子系统 $m_u - k_m - m_b$ 的自然频率 f_m。根据 5.3 节，整个系统 $m_u - k_m - m_b - k_v$ 中较高阶模态的阻尼(阻止颤振)常数 $\Delta_2 = 2\pi f_2(c/c_{cr})_2$ 可以用子系统的阻尼常数 $\Delta_m = 2\pi f_m(c/c_{cr})_m$、$\Delta_v = 2\pi f_v(c/c_{cr})_v$ 以及耦合系数 $\sigma = 2\gamma \dfrac{f_m f_v}{f_m^2 - f_v^2}$(见式(5-48))来表示。其中，$\gamma = \sqrt{m_b/(m_b + m_u)}$ 为弹性耦合系数，$f_m = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{k_m(m_b + m_u)/m_b m_u}$、$f_v = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{k_v/m_b}$ 是各子系统的自然频率。由式(5-55)可以得到

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\frac{(1 + \sqrt{1 + \sigma^2})\Delta_m - (1 - \sqrt{1 + \sigma^2})\Delta_v}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \tag{8-40}$$

对典型的机床来说，$f_m \gg f_v$，因此

$$\sigma^2 = 4\gamma^2 \frac{f_m^2 f_v^2}{(f_m^2 - f_v^2)^2} \approx 4\gamma^2 \frac{f_m^2 f_v^2}{f_m^4} = 4\frac{m_u}{m_b + m_u}\frac{f_v^2}{f_m^2} < 1 \tag{8-41}$$

且

$$\Delta_2 \approx \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{1 + \sigma^2/2}\right)\Delta_m + \frac{\sigma^2}{2 + \sigma^2}\Delta_v\right] \tag{8-42}$$

在稳定/颤振阈值处，结构阻尼的稳定作用被切割过程中的扰动所抵消，$\Delta_m = 0$，因此只有座架给系统了提供阻尼。此时，由式(8-42)可以得到

$$\Delta_2 = 2\pi f_1\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)_1 \approx \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2 + \sigma^2}\Delta_v \approx \frac{\sigma^2}{4}\Delta_v = \frac{\sigma^2}{4}\left[2\pi f_v\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)_v\right] \tag{8-43}$$

或者
$$\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)_1 \approx \frac{\sigma^2}{4}\frac{f_v}{f_1}\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)_v \tag{8-44}$$

将式(8-41)代入式(8-44),应用等式$(c/c_{cr})_v=\delta_v/2\pi$,并考虑到$f_1 \approx f_m$后,上面的表达式变为

$$\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)_1 \cong \frac{1}{2\pi}\frac{m_u}{m_b+m_u}\frac{f_v^3}{f_m^3}\delta_v \tag{8-45}$$

式(8-45)的意义如下:如果机床的动态稳定性对安装条件非常敏感,那么隔振系统的效果取决于动态稳定性指标的大小

$$\Phi_{dt} = f_v^3\delta_v \tag{8-46}$$

这个指标表明安装或隔振系统的自然频率(刚度)稍微减小时,只需要将安装系统的阻尼增加到足够大就可以对其进行补偿。

必须注意的是只有当结构刚度k_m和(或)自然频率f_m,以及(或)结构阻尼δ_m非常小,或者其它结构性能和(或)工作性能不是最优时,安装元件或隔振器才能抑制机床的颤振。安装条件通常不会明显地影响机床的刚度。如果设备的内部结构发生了改变(如车床上刀架的位置或者刨式铣床的台架位置发生变化),其模型可能发生变化,因此机器对振动的敏感性也会发生变化。

文献[17]通过一台中型车床对式(8-46)进行了实验验证。颤振的抑制能力可以果用车床平稳工作时最大的切割深度(t_{lim})来描述。表8-5是通过不同座架测试的结果。座架A是全金属材料的千斤顶,其它座架是由橡胶弹性元件制成的常数自然频率(CNF)隔振器,它们能够为安装系统或隔振系统提供不同的自然频率和阻尼。图8-20为稳定的最大切割深度(t_{lim})和Φ_{dt}(用于计算安装系统的垂直自然频率$\Phi_{dt}=f_v^3\delta_v$)之间的关系。从图中可以看出,车床安装在大阻尼隔振器(B)上的稳定切割深度和刚性安装(A)时的切割深度相同。

表 8-5　车床安装系统颤振时的测试结果

机座	f_{vx}/Hz	δ_{vx}	f_{vy}/Hz	δ_{vy}	Φ_{dsi}
A	32	0.39	13	0.09	12800
B	30	0.57	10	0.67	15400
C	24	0.5	7.8	0.5	6900
D	20	0.9	6.3	0.88	7200
E	17	0.42	5.4	0.44	2060
F	12	0.38	3.2	0.3	660

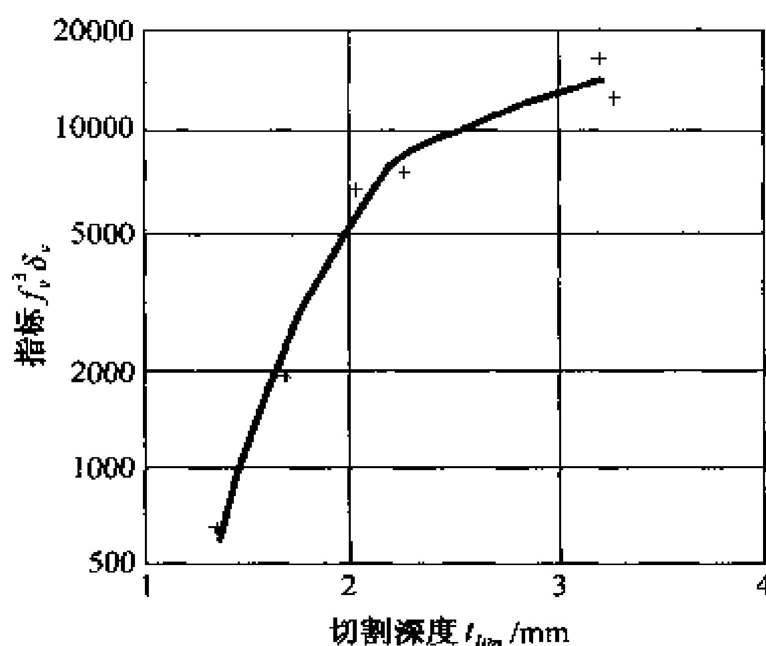


图 8-20　稳定的最大切割深度 t_{lim} 和 $f_v^3\delta_v$ 之间的关系

8.3.2　通用机械设备的振级

在许多情况下，座架系统以自然频率剧烈振动时会干扰通用机器设备的正常工作。实际机器有许多振源，它们的频率大小和作用方向各不相同，这将对设备的振级造成影响。同时，地面和其它支承结构的动态性能也可能会影响振级的大小。虽然不太严重的振动不会降低通用机器的性能，但可能使工作人员感到心情烦躁和身体不适。一般来说，通过试验选择隔振器是最可靠的方法，

但本节所提出的理论指标被证明在隔振器的优化过程中也是非常有用的。

最常见的振源是产生离心力的不平衡旋转部件，如齿轮、滑轮、法兰等。不平衡部件产生离心力的幅值和旋转频率f的平方成正比。然而，对旋转频率更高的部件而言，平衡性要求变得更严格。因此，某些特定元件的旋转频率f和离心力的容许值F_{cf}之间的关系需要修正。根据工业标准可以知道，电动马达的转子所允许的F_{cf}和$f^{0.5}$近似成正比；砂轮的F_{cf}和$f^{-0.5}$近似成正比；车床上加工的不平衡坯件（如经锻锤、浇铸等得到的元件）的F_{cf}和$f^{-0.5} \sim f^{0.5}$近似成正比。在第一次近似中，可以假设额定离心力的大小与频率无关。对具有其它振源的机器也可以采用相同的方法。例如，由几种机床产生的振动位移频谱幅值（在空转过程中确定或进行整体平均来确定）在相当宽的频率范围内（约(10～100) Hz内）可以认为是不依赖于频率的。因此，安装在刚性或柔性座架上的机器都可能发生共振。

假设激励力的幅值F_0和频率无关，机器底座/框架的质量为m_b，其产生的共振幅值为

$$(x_b)_{res} = \frac{F_0}{k_v}\frac{\pi}{\delta_v} = \frac{F_0}{4\pi f_v^2 m_b \delta_v} \qquad (8-47)$$

式中：k_v和δ_v是座架的刚度和阻尼；f_v是机器的自然频率。因此，在工作区内的相对振幅为

$$(x_{rel})_{f_v} = \frac{F_0}{4\pi f_v^2 m_b \delta_v} \frac{1}{\frac{m_b}{m_b + m_u}\frac{f_m^2}{f_v^2} - 1} \qquad (8-48)$$

如果$f_v \ll f_m$，上式对采用了隔振安装的系统是成立的，所以有

$$(x_{rel})_{f_v} \cong \frac{m_b + m_u}{m_b^2}\frac{F_0}{4\pi f_m^2 \delta_v} \qquad (8-49)$$

因此，在工作区内，基于上述假设的最大相对振幅不依赖于隔

振系统的自然频率，而仅仅取决于阻尼。该阻尼被认为是隔振指标

$$\Phi_{vl} = \delta_v \tag{8-50}$$

在刚性安装时，f_m 和 f_v 可约，相对振幅将增加很大。如果将机器固定在一个大质量的基础块上，等价于增加了式(8-31)中的质量 m_b，相应地减小了相对振动。振动的速度级通常被认为是机器振动状态的指标之一。当振动使人员受到危害或产生了令人厌烦的作用时，其所在频率范围比相应振动速度级所在的频率范围高(2~8)Hz(国际标准 ISO2631)。由式(8-47)可知，共振时最大的幅值是

$$(v_0)_{f_v} = 2\pi f_v (x_{m_v})_{f_v} = \frac{F_0}{2m_b f_v \delta_v} \tag{8-51}$$

因此，可以通过下面的指标

$$\Phi_{vv} = f_v \delta_v \tag{8-52}$$

对具有不同振动速度级的安装系统进行比较。因此，为了减小被隔振物体的振动速度级，增加自然频率和增加阻尼所得到的效果相同。

8.3.3 隔振对轴承载荷的影响

由于越来越多的机器和设备被安装在隔振器上，我们可以看到这样的现象，即在许多情况下，安装在隔振器上的机器的轴承使用寿命比刚性安装时的使用寿命长。作用在轴承上的动态载荷其主要成分是离心力，它是由被支承在轴承上的不平衡转子所产生的。

通过图 8-21 中的模型可以研究隔振对轴承上所承受的动态载荷的影响[119]。虽然隔振系统的主要作用是减少不平衡力 $F(t)$ 向基础传递，由传递系数 μ_F 描述(见式(5-6))，但它还改变了轴承所承受的动载荷 $R(t) = R_0\cos\omega t$。模型中的轴承用刚度 k_1 和阻

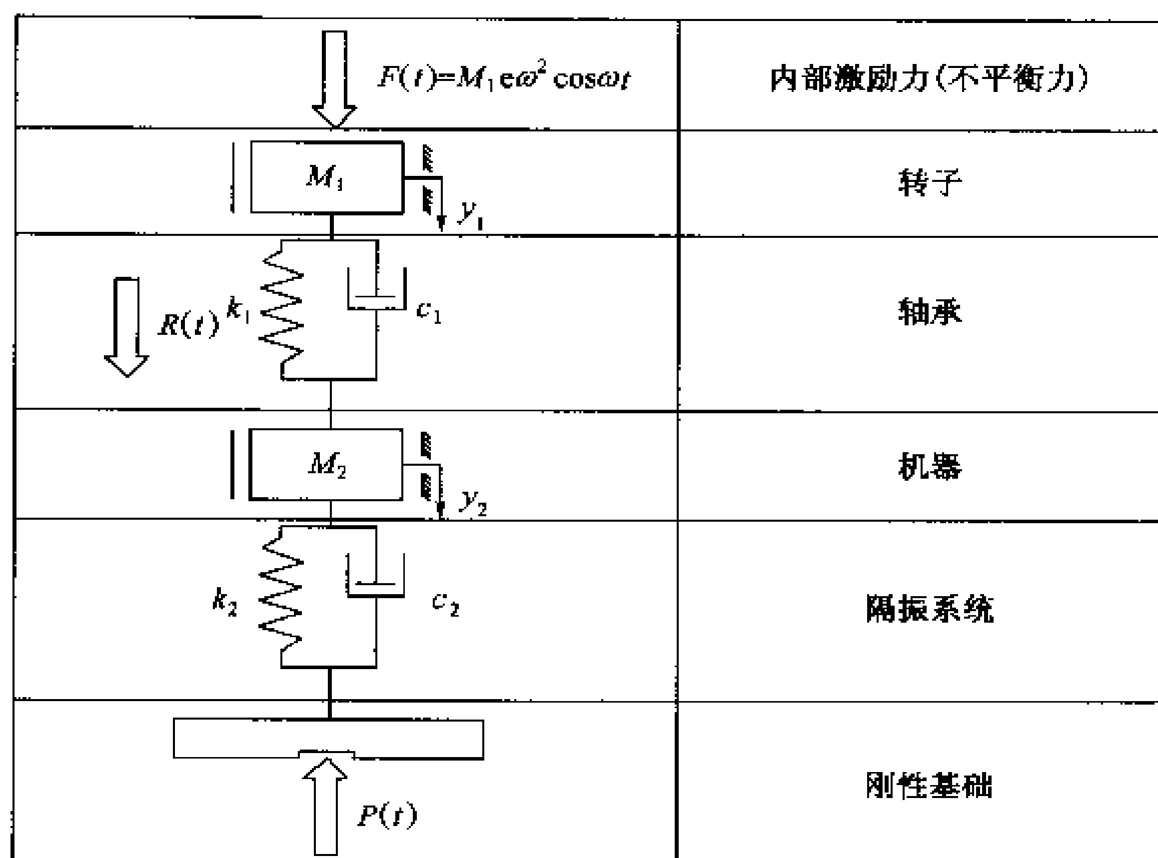


图 8－21　转子轴承的动态载荷模型

尼 c_1 来表示[1]，隔振器 k_2、c_2 对动态载荷幅值 R_0 的影响可以用影响函数表示

$$W = \frac{(R_0)_v}{(R_0)_r} \tag{8-53}$$

式中：$(R_0)_v$ 是被隔振物体轴承所承受的动态载荷幅值；$(R_0)_r$ 是在刚性安装时轴承中动态载荷幅值（$k_2=\infty$）。研究表明，在较宽的频率范围内，$\mu_F<1$ 且 $W<1$。因此隔振的同时伴随着轴承中动态载荷的减小。图 8－22 给出了 μ_F 和 W 与频率比 f/f_v 的关系，$f_v=1/2\pi\sqrt{k_2/(M_1+M_2)}$；图 8－22(a) 为转子的质量比较小（$M_1/M_2=0.1$）时的情况；图 8－22(b) 为转子的质量比较大（$M_1/M_2=1.0$）时的情况。其中，M_1 表示转子的质量，M_2 表示机器的质量，k_1 表示轴承的刚度，k_2 表示隔振器的刚度。刚度比（两种情况相同）为 $k_1/k_2=10$ 时，对所有的子系统来说，阻尼比都是 $\zeta_1=\zeta_2=$

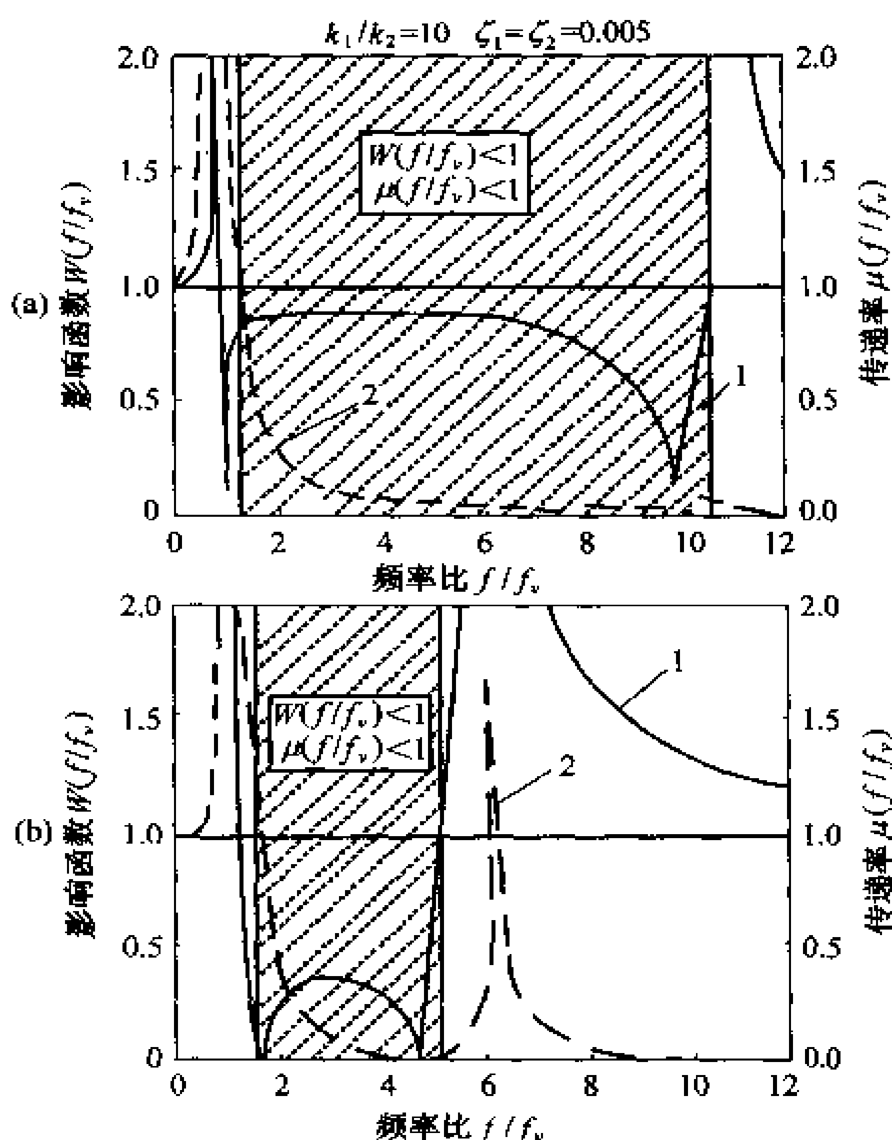


图 8-22 影响函数 W(1)和传递率 μ_F(2)的频率依赖性

(a) 轻型转子($M_1/M_2=0.1$);(b) 重型转子($M_1/M_2=1.0$)。

0.005(对于转子子系统 $M_1-k_1-M_2$,阻尼比为 $\zeta_1=c_1/2\sqrt{k_1M_1M_2/(M_1+M_2)}$;对于隔振系统 M_2-k_2,阻尼比为 $\zeta_2=c_2/2\sqrt{k_2M_2}$)。从图中可以看出,$\mu_F<1$ 且 $W<1$ 的频率范围非常宽,这表示同时存在隔振效果和减小轴承动载荷的效果。虽然对质量较小的转子而言,这种频率范围更大,但对质量更大的转子,动态载荷减小得较多。当 $\zeta_1=\zeta_2=0$ 时,$W<1$ 的频率范围的上限频率和下限频率的闭型表达式为[19]

$$\frac{f_1}{f_0},\frac{f_u}{f_0}=$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1+\mu)\left[1+\frac{2+\mu}{2\mu}\frac{k_1}{k_2}\mp\sqrt{\left(1+\frac{2+\mu}{2\mu}\frac{k_1}{k_2}\right)^2-\frac{4}{\mu}\frac{k_1}{k_2}}\right]}\tag{8-54}$$

8.3.4 隔振对空气噪声的影响

显然，隔振可以减小高频振动的传递率，并使机械设备（如通用机械、普通精度的机床等）附近的空气噪声降低，8.4 节将给出了相关的例子。幸运的是设备的近场噪声并不是非常明显。从 8.4 节可以知道，隔振后设备的噪声级可能保持不变，也可能被放大。一些文献研究表明锻锤安装在隔振座架上时噪声被降低。

如果工厂中的大多数机器都被安装在隔振器上，那么噪声会显著地减小，其主要原因是降低了地面的辐射噪声。图 8－23[20] 对某工厂内 10 台车床的噪声级进行了比较，这些车床开始被刚性安装在地面上（采用水泥浇注的方法），后来被重新安装在常数自然频率的橡胶金属隔振器上（$f_{nz}\approx 20\text{Hz}$）。当这些机器在相同的区域内工作时，（*A* 计权）噪声整体下降 2dBA（隔振安装时机器噪声为 87.5dBA，刚性安装时机器噪声为 89.5dBA）。在更令人厌烦

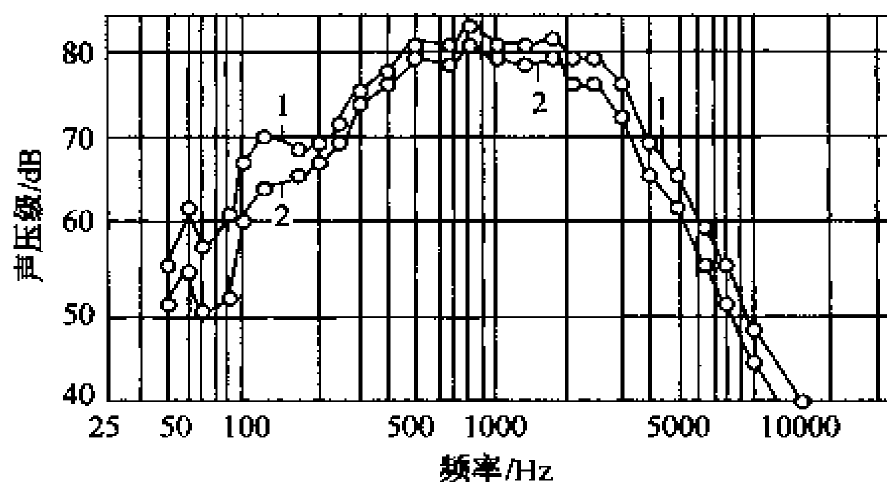


图 8－23 厂房内安装 10 台车床时的噪声频谱

1—车床刚性安装在地面上；2—车床安装在橡胶金属 CNF 隔振器上，$f_{nz}=20\text{Hz}$。

的高频噪声范围((2000 ~ 3000)Hz)内,甚至可以降低(4 ~ 5)dBA。

8.4 交通工具上的发动机和机器的安装

交通工具上安装的机械设备必须承受由冲击、船舶的摇摆、公路的崎岖不平、传动系统载荷的变化等因素导致的强烈的振动。通常需要应用一些有效的隔振措施来保护这些设备。由于被隔振物体可能会承受很大的载荷或产生很大的位移,因此,在隔振器的设计过程中,应该采用能够减小运动的缓冲器或者具有硬特性的非线性隔振器。在条件恶劣的海上,船用隔振器承受载荷的频率为0.1Hz,大小为被隔振物体重量的一半。而在崎岖不平的路面上,车辆上的隔振器所承受的载荷可达到被隔振物体重量的两倍。

在汽车和越野车上设计合理的发动机安装系统是改善噪声、振动和崎岖不平环境的主要方法之一。发动机采取合适的弹性安装不仅可以减小冲击对发动机本身的影响,而且还能减小发动机对车辆结构的影响。发动机的悬挂系统应该具备必需的自然频率和振动模态。为了提高隔振效果(既保护车辆结构不受传动系统产生的激励的影响又保护发动机不受路面凹凸不平引起的激励影响,路面激励通常被车辆的弹性框架放大),发动机悬挂系统以及发动机附件的自然频率应该减少,而另一方面,发动机附件应该具有相当大的刚性,因为它必须能承受发动机产生的扭矩而不产生很大的变形和偏移。这种矛盾(悬挂系统应该是柔性的面不是刚性的,在其它许多工程实际中常常遇到这种矛盾[21])对于前轮驱动的车辆非常突出,因为传递到驱动轮的总扭矩总是作用在发动机悬挂系统上。因此要求悬挂系统有更大的扭转刚度面系统的其它自然频率必须很小,从而在最恶劣的条件下(发动机低速空转)满足所需要的隔振效果。发动机低速空转从燃油效率来看是有益的,但由此产生的低频激励(对四缸发动机而言是发动机二阶不平衡谐波)可能会导致方向盘产生剧烈的振动[22]。另一方面,希

望传动系统的自然频率不低于其扭转振动的基频。对于后轮驱动的车辆来说，传动系统的自然频率为 5Hz 左右，而对于前轮驱动的车辆，由于传动时间短，其频率可以达到 10Hz 左右。正因为如此，发动机悬挂系统自然频率的下限应该提高。以往自然频率的范围通常约为(5 ~ 30)Hz，但对前轮驱动的车辆而言，这个范围应接近(10 ~ 30)Hz。研究认为将这个范围压缩到(10 ~ 18)Hz 较为有利。对四轮驱动的车辆而言，所推荐的范围为(5 ~ 12)Hz[23]。

典型的发动机悬挂系统采用(3 ~ 4)个隔振器。部分或所有这些隔振器被直接安装在车身上或被弹性支承着的“抗振子框架”上。为了解决上述矛盾，主要的方法是改变隔振器的位置和它们的布置方式(一种方法是所谓的会聚式安装，见 5.4 节)。对大多数生产和测量用的机械设备而言，它们的惯性主轴和自然轴(垂直轴、纵轴、横轴)近似平行。对于车辆发动机，特别是典型的多缸发动机而言，纵向($x-x$)的惯性主轴(最小惯性轴)和水平的曲轴中心线呈 10° ~ 15°的角，如图 8 - 24 所示(对自动档的车辆而言，这个角度较小，但比手动档汽车大得多)。有许多方法包括试验法和计算法可以用来确定发动机传动装置的惯性半径。当角度 α 已知，“垂直”轴 $z-z$ 通过如图 8 - 24 所示的平面中的重心，且横轴 $y-y$ 垂直该平面时，惯性主轴可以近似认为是与 $x-x$ 轴垂直的直线。当这些轴的位置确定后，就可以估计出惯性半径。因为这是一个静定系统，所以除非采用 CNF 隔振器，否则应该优

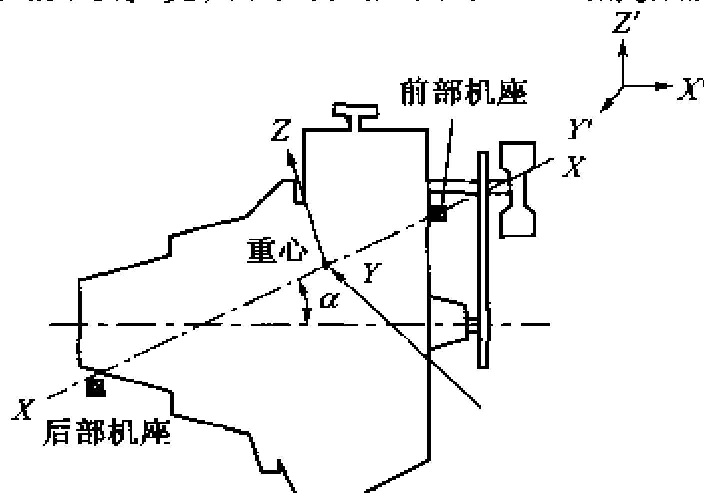


图 8 - 24　发动机的示意图

先使用 3 个隔振器的安装方式。这样可以降低隔振费用。应用 6.5 节所讨论的方法很容易在 x、y、z 坐标系中对安装在隔振器上的发动机系统的六个振动模态进行解耦。然而，发动机的主要振源是汽油燃烧时作用在活塞上的驱动力、活塞连杆产生的不平衡惯性力、曲轴—飞轮—传动系统产生的扭转振动。对于直列式发动机，平动激励向量和自然坐标系 x'、y'、z'轴重合，扭转激励绕 x' 轴旋转。即使在坐标系 x、y、z 中对系统进行了解耦，绕 x、y、z 轴的实际振动仍然是耦合的，因为在运动方程的右边（激励函数）包含了相同的激励力成分。需要注意的是沿 $x-x$ 轴的激励（由沿 $x'-x'$的实际激励产生）幅值和 $\sin\alpha$ 成正比。

对这种直列式发动机而言，由于角度 α 比较小，所以由激励导致的耦合相对较小。在 V 形发动机中，主要的激励力和 $y'-z'$ 平而另成夹角，因此，对于不同的轴，在运动方程中出现了额外的相关激励力分量。

对绕 $x-x$ 轴的扭矩激励而言，也会出现相同的情况。它的分量出现在绕 x'和 z'轴的运动方程中。

虽然在发动机隔振系统的设计过程中必须考虑这些因素的影响，但在许多情况下，下列原因可以减小它们的影响：①角度 α 很小（$\sin 15° = \sim 0.26$，$\sin 10° = 0.17$，$\cos 15° = 0.97$）；②由于采用了 V 形发动机，或者六缸和多缸直列式发动机，因而具有很好的平衡性，这降低了激励的强度并减少了激励所导致的模态耦合。

例：文献[23]应用缩小自然频率范围的方法减小了坐标间的耦合。这里对一个座架进行改进可以达到上述目的。

图 8－25(a)所示为原来的发动机隔振系统的自然频率和模态形状。第 1 阶模态是绕纵轴的翻滚运动、横向运动和绕垂直轴的偏摆运动的组合。第 2 阶模态是绕横轴的俯仰运动和纵向运动的组合。第 3 阶模态是相对单纯的翻滚运动，第 4 阶模态是垂直运动和翻滚运动的组合，第 5 阶模态是相对单纯的俯仰运动，第 6 阶模态是以偏摆运动为主并包含一些横向运动。

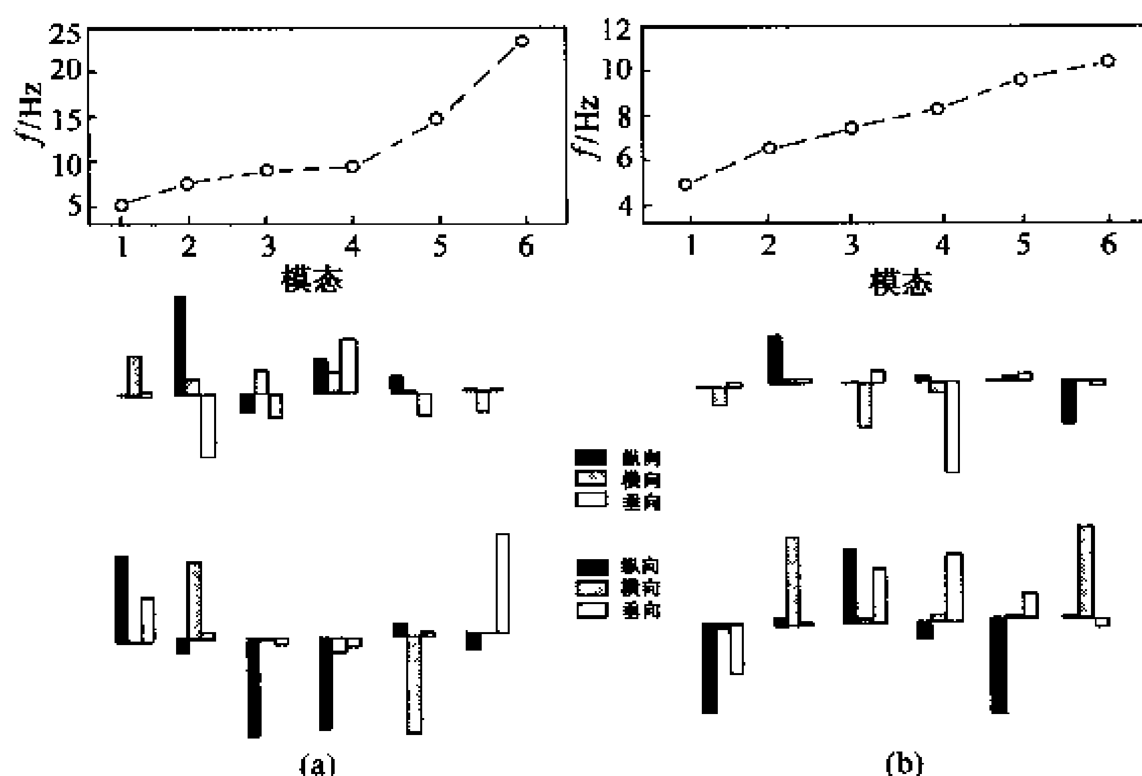


图 8-25　采用不同座架时的自然频率和模态形状

（a）原来的座架；（b）修正后的座架。

理论上，可以通过重新布置传动系的安装位置并修正它们的参数来实现优化隔振。但重新布置安装位置通常是不符合实际的，因为发动机机舱的外壳设计涉及到许多相互矛盾的问题。在这种情况下，研究表明对只有对座架的参数进行修正（减小 1/3 的横向刚度，减小 1/5 的垂向刚度）才能减小坐标间的耦合并使自然频率的分布更合理（图 8-25(b)）。

改进后的系统可以使自然频率更加均匀地分布在适当的较窄频率范围内（5Hz～11Hz）。第一阶模态仍以翻滚运动为主，横向运动减少；第二阶模态中俯仰运动成分加大而纵向运动成分减少；第三阶模态变得更复杂，它由横向运动和显著的翻滚运动、俯仰运动组成；第四阶模态变为由垂直运动和偏摆运动组成；第五阶模态以翻滚运动为主；第六阶模态变成了俯仰运动和纵向运动的组合。与原系统（图 8-25(a)）相比较，发动机自然坐标间模态的耦合在整体上有一些减小。

改进后的系统可使传递到横梁（用来支承座架）上的振动有所减小（在(850～4000)r/min 范围内减小 7%～17%，在 850r/min 时减小 7%，在 2000r/min 时减小 17%）。当转速较低（850～1500r/min）时，驾驶员位置的噪声也有所减小（1.5dBA）。

因此，在 x、y、z 坐标系中使发动机的振动模态解耦以及合理地调整系统的自然频率对发动机振动噪声的控制都是非常有益的。

车辆发动机隔振系统的动态特性以及发动机和支承框架的变化对系统的影响还无法判断[24]。因此，在发动机的自然坐标（x、y、z）或整车自然坐标（x'、y'、z'）中对发动机隔振系统进行解耦可能不是最好的办法。现在存在这样一个观点，即当左前方或右前方的隔振器采用不同的刚度常数来给系统引入耦合时，可以改善振动条件。另外一个相似的观点认为跳动（垂直方向）模态和俯仰模态之间的耦合具有积极的效果。有些人则不完全同意上述观点，其原因是耦合模态之间的阻尼分布更加均匀了。当系统被解耦后，因为隔振器在不同的方向上可能具有不同的阻尼，所以各模态也具有不同的阻尼。例如具有橡胶弹性元件的隔振器在剪切方向上的阻尼比压缩方向的阻尼大得多。虽然需要不断地研究更好的发动机动态模型，但目前最有效的优化方法是通过实验选择隔振器的参数（如采用变刚度隔振器）。这种方法在将来能够发展成为根据车辆的运转状态（如怠速、慢速行车等）对变刚度隔振器进行开关控制或者连续控制。

由于车辆如汽车、卡车、建筑和农用机械等的发动机都是规模生产的设备，它们的几何和惯性参数可以精确地确定。同时，其隔振器也不是从市面上的系列隔振器中选择出来的，而是根据每个发动机模型进行单独设计得到的。这和 1.3 节中所讨论的情况完全不同。按照传统的观点，常用隔振器主要受到三个不确定因素的影响：① 橡胶硬度发生变化，从而与理论值有差别；② 隔振器的载荷分布发生变化；③ 在发动机不同的安装点处，隔振器的刚度比 $\eta_{x,y}$ 不同。第一个因素主要是由于生产误差引起的（硬度通

常相差 ±5 个单位，刚度相差 ±17%）。第二个因素取决于所采用的隔振系统，它通常需要安装 3 个或 4 个隔振器。对于三隔振器系统而言，安装点之间载荷分布发生变化可能仅仅是由于发动机安装了一些附件，如空调、增压器等。这种因素的不确定性非常小，约 ±5%。对于四隔振器系统，由超静定导致的不确定性较大。由于制造误差、底盘（很少发生在机器上）上安装点的高度可能发生偏差（其变化可以假设在 ±（1.0 ~ 1.5）mm 之内。因为这种隔振系统的自然频率通常是 $f_z \approx 10\text{Hz}$，所以高度变化就相当于隔振器在被隔振物体重量的作用下产生 $\Delta \approx 2.5\text{mm}$ 的静态变形，它取决于 K_{dyn} 的值，见式（5 - 33）），因此，安装点之间重量分布的变化可以保守地假设为 ±1.0/2.5 = ±40%。在发动机安装系统中，隔振器之间的刚度比 $\eta_{x,y}$ 的变化至少为 ±20%。相应地，隔振器之间刚度的有效散度（见 6.5 节）范围是：在三隔振器时为 ±1.17 × 1.05 ×1.20 = ±1.47，在四隔振器时为 ±1.17 ×1.40 ×1.20 = ±1.97。

在车辆设计过程中，有许多种建模的软件包可以用来优化发动机的安装系统。虽然有些是商业应用软件，但它们大多数为各车辆制造商所有[23,24]。通常情况下，这些优化方法没有考虑支承结构的动态特性，并且只是将发动机—传动系统作为一个独立的单元来考虑，这样就忽略了发动机通过传动轴以及其它连接部件与某些结构之间的联系。因此，通过计算所得到的隔振方式并不能够达到令人满意的效果。对于一些新的车辆来说，使用大量特性稍微不同的隔振器进行试验调整是一种典型的方法。

使用 CNF 隔振器可以避免上述第二个因素（载荷分布的不确定性）的影响并使第一个因素（橡胶硬度的不确定性）对自然频率的影响减小 ±2.5% 或者对刚度的影响减小 ±5%。如果采用相同类型的隔振器，可使第三个因素产生的影响（刚度比的不确定性）降低 ±10%。因此，对 CNF 发动机隔振器而言，刚度的有效散度范围约为：±1.05 ×1.10 = ±1.16。这将大大地减小系统中坐标间的耦合（除非特地引入耦合），并缩短调整过程。

在发动机隔振系统中也可以使用会聚式隔振系统(使用倾斜放置的隔振器,见5.4.3节)。

隔振系统除了隔离发动机动态激励产生的振动以外,还需要满足下面的条件:

① 需要控制由地面激励导致的发动机运动。这主要是由于在不平整的公路上,车辆结构上的动态载荷可能比静态载荷大3倍[14],发动机和相邻底盘以及车体之间的间隙大约只有15mm[23]。

② 需要控制由于巨大的反作用扭矩导致发动机产生剧烈运动,特别是在低速档时更要注意。同时,需要控制由于加速、刹车和急转弯(加速度达到1g)导致的发动机前后运动。隔振系统应该将发动机/传动系统三维运动的幅值限制在±15mm内,转动的角度限制在±6°。为了满足这个要求,需要应用限制冲击的缓冲器和刚度渐增的隔振器。CNF隔振器不断变硬的载荷—偏移特性使得它们在发动机隔振应用中更有前景。

③ 为了安全起见,发动机机座必须具有"系留(captive)"功能,从而当弹性元件突然失效时不会使发动机和子框架分离开来。

在典型的发动机安装系统中,通常将两个隔振器分别布置在$x-x$主惯性轴前部的两侧,而且在变速箱下方也安装一个或两个隔振器,如图8-26(a)所示[14]。前面两个隔振器之间的跨距(对

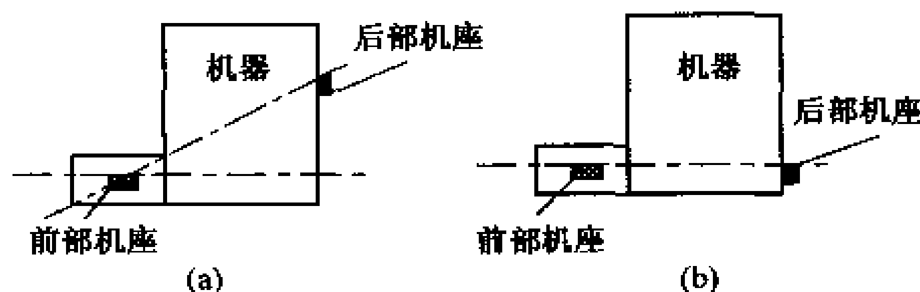


图8-26 汽车发动机座架的不同位置

于四隔振器的系统,也可以指后面两个隔振器之间的距离)可以使系统具有较大(绕$x-x$轴)的扭转刚度,从面承受发动机产生的脉冲扭矩。

虽然汽油发动机和柴油机采用了类似的结构，但柴油机产生的扭矩波动幅度大得多。通常情况下，前部的隔振器采用会聚式布置，且和后部隔振器放置的高度相同，见图 8－26(b)。会聚式布置的刚度中心应该在 $x-x$ 轴。从式(5－87)可以知道，隔振器离 $x-x$ 轴的距离越远，剪切刚度和压缩刚度的比越大，见图 8－27[14]。为了增加 $k_z/k_{x,y}$，在图 8－27 所示的情况中可采用具有刚性夹层的橡胶金属隔振器。

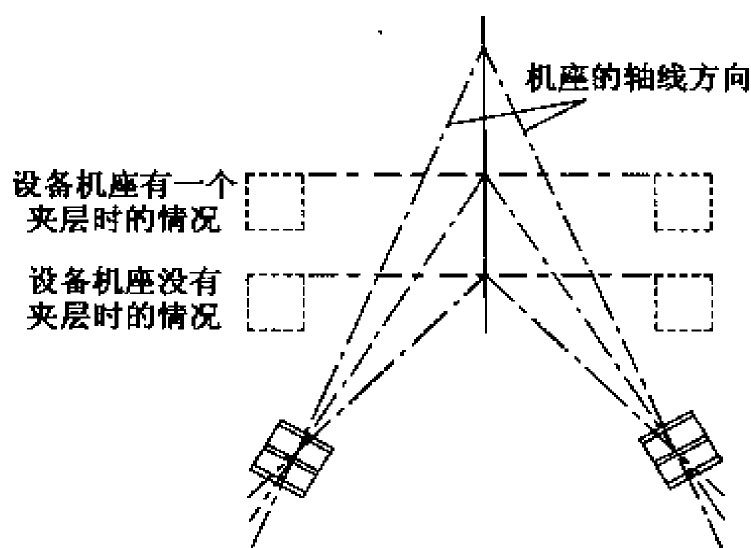


图 8－27　座架倾斜安装时的情况

发动机隔振系统必须满足许多相互对立的要求。为了隔离发动机怠速(约(15～30)Hz)时二次谐波的干扰，要求隔振器的刚度较小、阻尼较大；为了适应由于路面冲击导致发动机跳动产生的大振幅，要求隔振器的阻尼较大并具有缓冲作用，而在转速很高时，为了减小在车内由轰鸣噪声产生的高频振动的传递(约(200～500)Hz)，要求隔振器的阻尼较小。

通过应用一些材料(用于振动控制工程)的动态非线性可以实现上述目的，这些材料包括金属丝网等[25]。另外一个非常普通的方法是采用液力隔振器[24]。在一些豪华车辆中，应用了一些半主动控制装置[24]。如果设计合理，液力隔振器可以根据发动机的工作范围改变隔振装置的参数，从而提高装置的性能，但它比橡胶隔振器的费用高得多。在恶劣的工作环境中(特别是高温环境和

具有腐蚀的环境,如盐分很多时[23]),液力装置的可靠性不高。新生产的车辆,特别是普通卡车,它们在性能标准的测试中都要承受很大载荷,从而模拟使用大约 10 年后的情况[23]。虽然液力装置可以通过精确地调整以满足某种要求,但调整过程对加工误差非常敏感,而且对车辆的类型也非常敏感。此外,它对温度的变化也很敏感,因为温度影响装置内液体的黏度。

例如,当发动机怠速时,所需要的扭矩非常小,同时要求隔振器的刚度很小,从而提供较小的自然频率,特别是对产生不平衡二次谐波的四缸发动机而言,更需要满足这种要求;当车辆在慢速行驶时,扭矩非常大,激励力的频率也非常高,要求隔振器的刚度能够变大。采用静态或动态非线性隔振器都能够很容易地解决这个问题。

在 20 世纪 50 年代—60 年代,大阻尼隔振器常常用于发动机安装。大量的研究表明[26],大阻尼隔振器可以有效地改善车辆的噪声、振动环境。然而,随着机舱中发动机的功率增加以及催化式排气净化器的引入,使得机舱中的温度显著升高,因而大阻尼隔振器的应用已经减少。近来研制的高阻尼/耐高温大阻尼橡胶混合物可以大大地改善发动机隔振系统的性能。如果将大阻尼和静态或动态非线性特性相结合,可以更快更好地达到所要求的隔振效果。

参考文献

[1] Rivin E I. Passive Vibration Isolation. New York: ASME Press, 2003.

[2] Rivin E I. Review of Vibration Insulation Mountings for Machine Tools. Machines and Tooling. 1965, (8): 37 - 46.

[3] DeBra D B. Vibration Isolation of Precision Machine Tools and Instruments. Annals of the CIRP. 41(2): 711 - 718.

[4] Amick H and Bui S K. Review of Several Methods for Processing Vibration Data. Vibration Control in Microelectronics, Optics, and Metrology. SPIE. Vol. 1619: 253 - 264.

[5] Rivin E I. Vibration Isolation of Precision Equipment. Precision Engineering. 1995, Vol. 17: 41 - 56.

[6] Rivin E I. Stiffness and Damping in Mechanical Design. Marcel Dekker Inc. , 1999.

[7] Owen N and Hale R. Factors in the Design and Selection of Vibration - Sensitive Equipment. Vibration Control in Microelectronics, Optics, and Metrology. SPIE. Vol. 1619: 56 - 70.

[8] Kwan Y B P and Loopstra E L. Nullifying Acceleration Forces in Nano - Positioning Stages for Sub - 0. 1μm Lithography Tool for 300 mm Wafers. Proceeding of the 15th Annual Meeting of ASPE. 2000, 525 - 528.

[9] Amick H and Bayat A. Meeting the Vibration Challenges of New Photolithography Tools. Journal of Sound and Vibration. 2002, 36(3): 22 - 24.

[10] Lang G F and Snyder D. Understanding the Physics of Electrodynamic Shaker Performance. Journal of Sound and Vibration. 2001, 35(10): 24 - 33.

[11] Eisele F and Schwaighofer R. Electric Motor as Vibration Exciter for a Machine Tool. Maschinenmarkt. 1965, 71(79) [in German].

[12] Rivin E I. Principles of Vibration Isolation of Mechanical Presses. Metal Stamping Production. 1971, (10): 20 - 22 [in Russian].

[13] Rivin E I. Evaluation of Vibration Isolation Systems for Forging Hammers. Meeting Handbook on "Vibration Isolation of Heavy Structures". London: Institute of Acoustics. 1987: 91 - 97.

[14] Freakley P K and Payne A R. Theory and Practice of Engineering with Rubber. London: Applied Science Publishers, 1978.

[15] Belyaev Y V. Peak Loads in Co - Impacting Parts of Forging Hammer. Metal Stamping Production. 1970, No 8 [in Russian].

[16] Jarausch R. Hammer, Fundament and Umgebung als Schwingungsystem. Maschinenmarkt. 1965, 71(11) [in German].

[17] Rivin E I. How Methods of Installation Affect the Vibration Resistance of Machine Tools. Machines and Tooling. 1974, 45(11): 25 - 27.

[18] Tobias S A. Machine Tool Vibraiton. London: Blackie, 1965.

[19] Golec Z and Cempel C. Machine Vibroisolation and Dynamic Loads of Bearing. Mechanical Systems and Signal Processing. 1990, 4(5): 367 - 375.

[20] Rivin E I. Cost - Effective Noise Abatement in Manufacturing Plants. Noise Control Engineering Journel. 1983, (6): 103 - 117.

[21] Fey V R and Rivin E I. The Science of Innovation. The TRIZ Group, W. Bloomfield, MI, 1997.

[22] Rivin E I and Fey V R. Case Study: Solving Rough Idle Problem for a Compact Car.

Journal of the Altshuller In - te for TRIZ Studies. 2000, Vol. 2, 20 - 22.

[23] Zavala P A G, Pinto M G, et al. Powertrain Mounting Development Based on Computational Simulation and Experimental Verification Method. Proceeding of the 2001 SAE Noise and Vibration Conference. SAE Paper 2001 - 01 - 1509.

[24] Yu Y, Naganathan N G, et al. A Literature Review of Automotive Vehicle Engine Mounting Systems. Mechanism and Machine Theory. 2001, Vol. 36, 123 - 142.

[25] Rivin E I. Passive Engine Mounts - Directions for Future Development. SAE Transactions. 1985, 3. 582 - 3. 592.

[26] Kruse D F and Knable J J. Mounting the Subframe—A Correlation of Cradle Mounting Dynamics and Vehicle Ride Performance. SAE Technical Paper 840409, 1984.